INSTITUTO DE ENSEÑANZA SUPERIOR
"TAFI VIEJO"

TALLER INICIAL
LECTURA, ESCRITURA Y ORALIDAD (LEO)

Bienvenidos

Por medio del presente cuadernillo nos comunicamos con ustedes para darles la bienvenida y presentarles algunos aspectos fundamentales de la cursada en el nivel superior. Cursar una carrera en nuestro instituto implica tomar contacto con una cultura absolutamente particular. La misma tiene sus propias reglas, sus propios códigos, sus propias prácticas, entre ellas las discursivas. Esto constituye un gran desafío para ustedes como estudiantes de este nivel, puesto que su éxito dependerá, en gran parte, de que puedan desenvolverse lo más adecuadamente posible.

Asimismo, en estos tiempos de la era digital caracterizada por la preponderancia de internet, las redes sociales y los dispositivos de la conectividad, las prácticas y los procesos comunicacionales se han intensificado, dando lugar a nuevas sociabilidades y configuraciones culturales. Ustedes, los jóvenes son los principales protagonistas de estos cambios vertiginosos que desde las esferas de la vida cotidiana, del trabajo y de las instituciones exigen una permanente y ardua actualización.

Es necesario entonces, acceder a herramientas básicas para desempeñarse con eficacia ante los requerimientos de las nuevas producciones discursivas que les exige su recorrido académico. En cada disciplina, los géneros discursivos son diferentes, y proponen situaciones de lectura, escritura y oralidad. Es por ello, que ustedes no solo tienen que lograr determinados conocimientos disciplinares, sino también estar en condiciones de poder comunicarse fehacientemente. Producir textos adecuados a las distintas circunstancias en las que se producen académicamente en función de cada disciplina: a modo de ejemplo en el área de las ciencias sociales: relatos históricos, biografías; en matemáticas formulación de problemas, explicaciones lógicas; en el área de ciencias naturales: definiciones, notas de enciclopedia, informes de experimentos, infografías; asimismo los géneros discursivos propios de los medios de comunicación: entrevistas, reportajes, crónicas, artículos de divulgación científica, redes sociales, entre otros.

En este cuadernillo, las actividades con guías de lectura y escritura se proponen para desarrollar/reforzar las competencias necesarias para el nivel y abordan los géneros discursivos propios del ámbito académico. Bienvenidos, iniciamos el taller partiendo de las capacidades necesarias para llevar a cabo un proceso de aprendizaje de calidad. Es fundamental que dediquen tiempo para realizar las actividades, y así avanzar a partir de sus conocimientos previos y lograr nuevos aprendizajes.

Bienvenidos nuevamente. Les deseamos una buena cursada.

Docentes a cargo del área:

- **Prof. Roxana Lencina**
- **Prof. Viviana Toscano**

<u>ACTIVIDAD 1:</u> "*El descubrimiento de la escritura académica*", de Charles Bazerman[1]

1. ¿Para qué se lee y escribe en el nivel superior?
2. ¿Qué diferencias hay entre decir y escribir lo que se sabe?
3. ¿Qué diferencias presenta la escritura en el nivel superior respecto de otros ámbitos? 4. ¿Qué características definen una disciplina, según Bazerman?
5. ¿Cuál es, para este autor, el lugar de la escritura en cada disciplina?
6. ¿Qué actitudes, técnicas y recursos conviene tener en cuenta a la hora de escribir en este nivel

---

<u>El descubrimiento de la escritura académica</u>

Escribir en la universidad es un trabajo duro. Como estudiante, debes lidiar con materiales y conceptos desconocidos para decir algo novedoso, que refleje tanto tu pensamiento como la evidencia propia de tu disciplina. Al mismo tiempo, debes estar consciente de las diversas teorías y perspectivas presentes en libros y artículos leídos, de modo de poder evaluar y elegir entre esas ideas para desarrollar las tuyas. Es probable que, en tu vida escolar previa, vieras la escritura como una repetición de lo que decían los profesores y los textos leídos, para demostrar que habías aprendido y que podías transmitir de forma adecuada la información adquirida, usando la lengua correctamente. Sin embargo, ahora te están pidiendo algo más. Tus ideas, conocimiento, análisis y pensamiento crítico son fundamentales; pero deben construirse sobre la base del conocimiento acumulado por tu futuro campo profesional, con los modos de pensar, argumentar y presentar evidencia que le son propios. Cada disciplina genera nuevas formas de ver el mundo, nuevas formas de pensar sus problemáticas y nuevas formas de actuar en él. Pero para comenzar a ver y pensar de esa nueva forma, tendrás que adoptar la disciplina de tu área. La disciplina es algo así como un conjunto de lentes mágicas que te dejan ver detalles que nunca habías notado, comprender por qué estos son importantes y cómo se ajustan a ideas más complejas. No obstante, esas lentes también vuelven invisibles otras cosas, que podrían ser simplemente espejismos, o bien fenómenos propios del foco de otras disciplinas, es decir, de otras formas de ver. Un mismo evento, como sería la aparición de una nueva red social como Twitter, podría ser visto de forma muy diferente por un sociólogo, un cientista político, un psicólogo, un lingüista, un crítico cultural o un economista. Cada uno de estos

---

1Charles Bazerman, profesor de la Universidad de California, Santa Bárbara, es experto en la enseñanza de la escritura, entendida como una práctica socio- histórica. Participa del enfoque didáctico denominado Writing Across the Curriculum (WAP), que sostiene que es necesario desarrollar la escritura académica de forma continua a partir de las especificidades discursivas de cada disciplina.

profesionales ve diferentes cosas en este evento, debido a los diferentes problemas que resuelven, la clase de evidencia a la que atienden o las teorías en que se basan.

Descubrirás, gracias a tus lecturas y a los cursos, que existen estas lentes; pero realmente irás aprendiendo cómo usarlas en tus discusiones en clases y a través de las tareas escritas, pues solo entonces comenzarás a inspeccionarlas y a describir lo que puedes ver a través de ellas. Al hablar y escribir también aprendes a usar los términos conceptuales de tu campo, y los pones en relación con los términos de diferentes teóricos, la evidencia que recolectes, tu propio pensamiento y tus propias experiencias. En suma, al hacer tu escritura coherente e inteligible para los demás, también clarificas tu entendimiento y evaluación de las ideas, y de qué es lo que estas te enseñan acerca de la vida. Trabajar por una escritura más precisa y comprensible es ajustar el foco de tu lente disciplinar. Al inicio, puede que te abrumes con los textos perfectamente escritos que te asignan para leer, puesto que comunican de un modo mucho más preciso, exhaustivo y elocuente de lo que piensas que podrías hacerlo. Vas a sentir ganas de ceder la voz de tu escritura a la de esos otros textos, mediante largas citas y pocas palabras tuyas. Sin embargo, apropiarte de esas ideas y volverlas relevantes para lo que quieres decir consiste en seleccionar, parafrasear y resumir cuidadosamente las citas y luego, sobre estas, aportar tu mirada, tu opinión, tu experiencia y tu propia evidencia cuando sea apropiado. Mientras más practiques la inclusión de tu perspectiva mediante la discusión de las lecturas, más vas a avanzar en tus textos desde una voz meramente reproductiva hacia una voz que construye conocimiento, confiada en los hechos que reportas, el análisis y la crítica que formulas y las soluciones a los problemas que ofreces. Para lograrlo, tal vez puedas llevar un diario de lecturas, en el que comentes lo que lees; o anotar los textos al margen con notas adhesivas. Estas estrategias contribuyen tanto a desarrollar tu propio entendimiento y valoración de la lectura, como a ver conexiones y contrastes con otras lecturas y experiencias. A medida que aprendas a discutir tus lecturas con mayor confianza, y a incorporarlas de un modo más profundo en tu propio pensamiento, serás capaz de ocupar gradualmente el rol de una persona de tu disciplina, preparada para responder a nuevas situaciones, con nuevos aportes y al mismo tiempo con conciencia de lo que otros ya han dicho; de forma adecuada para tu campo, pero aun así expresando tus propias ideas al respecto. Escribir basándote en las lecturas de tu campo, representar sus ideas en tu texto y posicionar tus propias aserciones al respecto es un principio conocido como “intertextualidad”.

Cuando te involucres con tus lecturas, te darás cuenta de que los especialistas de tu campo ponen atención a ciertos fenómenos en particular, recogen ciertos tipos de evidencia por medio de procedimientos específicos y los representan de formas también específicas. Fíjate en cómo se hace esto, ya que este es el momento exacto en que la lente de la disciplina se usa para mirar el mundo. Lo que se mira, cómo se define el modo de mirar en tanto modo de conocer y los procedimientos exactos para mirar, corresponden a la ontología, la epistemología y la metodología de un campo. Los miembros de un campo disciplinar a menudo se preocupan por esta clase de cosas porque resultan cruciales para construir conocimiento disciplinar confiable y para comprender de qué tipo de conocimiento se trata. No obstante, en un nivel más práctico, al fijarte en estos procedimientos, vas a ir contando con modelos de las diferentes clases de fenómenos acerca de los cuales escribir, de cómo recoger información y de cómo escribir sobre ella. Cuando aprendas a participar de un campo y a reportar evidencia a otros miembros de este, ganarás credibilidad en la medida en que respetes y entiendas estos modos de participación. También, de esta forma, irás aprehendiendo la naturaleza del campo y de su trabajo. Más aún, te encontrarás con que los académicos de tu campo tienen formas propias de componer ideas e información y darles forma en textos reconocibles que desempeñan funciones específicas, tales como reportar un estudio de investigación, interpretar textos o presentar nuevos conceptos teóricos. A medida que te acostumbres al trabajo del campo y a los tipos de escritura que los profesores te encargan, los modos de razonamiento encarnados en esos géneros se te irán haciendo más familiares. Cuando aprendes a escribir en esos géneros, comprendes mejor cómo piensan los miembros de la disciplina y aprendes a presentar tu pensamiento para llevar a cabo las tareas del campo. Por estas razones, debes pensar los diversos trabajos escritos que los profesores te asignan como algo más allá de una carga que pone a prueba tus conocimientos. Cada tarea de escritura es un modo de desarrollar una cierta mentalidad, propia de la identidad profesional. En concordancia con ello, deberías darle a cada tarea tiempo suficiente para afinar tus ideas. No dejes la escritura para el último minuto: comienza a planificar cuando recién te asignan el trabajo, luego dedícate a recolectar información y desarrollar ideas, escribe índices, esquemas y borradores y, a continuación, corrige. Podrás ver cómo tu pensamiento y tus ideas cambian, podrás sentirte a ti mismo más inteligente y con mayor conocimiento. Te vas a sorprender por lo que escribes, te vas a impresionar con los diálogos profesionales a los que serás capaz de acceder. Habrás abierto tu camino hacia la carrera escogida por medio de la escritura.

ACTIVIDAD 2: ***LAS CONSIGNAS***

Cuando afrontamos la tarea de aprender, es muy común que en el proceso se nos den instrucciones o directivas que orientarán lo que debemos hacer para lograr ese objetivo. Estas instrucciones o directivas se denominan CONSIGNAS, y pueden ser orales o escritas. Encontrarás muchas consignas que te indicarán acciones que debes realizar para lograr un objetivo diferente en cada caso. Pero puede ocurrir que se generen dudas cuando intentes resolverlas. Para evitar las confusiones, hay que reflexionar sobre qué son las consignas, cuáles son sus características y qué estrategias se pueden utilizar para interpretarlas mejor y resolverlas adecuadamente.

¿QUÉ ELEMENTOS COMPONEN UNA CONSIGNA?

-Observa el siguiente ejemplo de consigna:

• En el siguiente texto marca los ejemplos:

> Entre 1870 y 1915 arribó a la Argentina casi un millón y medio de italianos. Como todos los inmigrantes, los italianos traían consigo muchas costumbres, muchas de las cuales se integraron con la cultura de nuestro país: los genoveses divulgaron la pizza, los napolitanos difundieron sus canciones.
>
> Los italianos debieron adaptarse a la lengua que se hablaba en nuestro país. Pero también terminaron por imponer algunas palabras. Por ejemplo "laburar" viene del italiano "lavorare", que significa trabajar.
>
> Si logramos identificar qué elementos componen una instrucción dada y cómo debemos analizarlos para resolver lo que se nos pide, será mucho más simple el proceso de resolver consignas para aprender.

TODA CONSIGNA IMPLICA:

Un objetivo: que equivale a responder a la pregunta ¿qué hay que hacer? En el ejemplo de más arriba, se debe realizar una acción que se indica con el verbo "marca". Esto significa que, si el estudiante responde a la consigna, por ejemplo, copiando una parte del texto, no ha comprendido el objetivo de la consigna, que está solicitando que se realice la acción de indicar o marcar. Si el alumno subraya una parte del texto o la encierra entre paréntesis, sí estará realizando adecuadamente la consigna.

Un orden de acciones o decisiones: que equivale a responder a las preguntas ¿qué hago primero? ¿y después? Para resolver la actividad dada más arriba, en primer lugar se debe realizar una lectura de la frase con un objetivo determinado: detectar los ejemplos. En segundo lugar, una vez que se ha tomado la decisión sobre cuáles son los ejemplos, se debe realizar la acción de marcar o señalar sobre la frase.

Ciertos conocimientos: esto equivale a responder a la pregunta ¿qué debo saber para resolver esta consigna? En el ejemplo que estamos analizando, para resolver adecuadamente la consigna se debe saber qué es un ejemplo y qué tipo de palabras aparecen habitualmente en los textos cuando se incluyen ejemplos. Algunas veces puede ocurrir que no tengamos esos conocimientos o que tengamos algunas dudas sobre lo que sabemos o, quizás, pensemos que lo que sabemos no es suficiente para resolver la consigna propuesta. En esos casos, deberemos resolver primero nuestras dudas, inquietudes o inseguridades sobre los conceptos o conocimientos, y una vez resueltas esas dudas, podremos resolver la actividad propuesta.

Estrategias para resolverla: esto equivale a responder a la pregunta ¿cómo resuelvo la actividad? ¿cuál es la mejor manera de hacerlo?

En muchos casos, las consignas pueden ser resueltas de más de una manera. Incluso, cada persona puede encontrar su propio “método” para resolver un problema que se le plantea. Esto ocurre con mucha frecuencia en matemática, pero también en las otras disciplinas. La forma de llegar al resultado, por ejemplo, de una cuenta, puede variar mucho de una persona a otra, y ninguna de las estrategias está errada si les permite llegar al resultado que corresponde Pero sí puede ocurrir que una persona que está acostumbrada a sumar o restar de una determinada manera descubra, observando a otra persona o aprendiendo de un maestro, que existen formas más prácticas o más veloces de hacerlo, y entonces modifique su estrategia habitual.

Volviendo sobre el ejemplo de consigna que hemos utilizado, podemos imaginar diversas estrategias que diferentes personas utilizarían para resolverla. Aquí mencionamos dos de ellas:

- **Localizar las palabras habituales** que aparecen cuando se incorporan ejemplos (“por ejemplo”, “tales como”) y, a partir de esas palabras, detectar los ejemplos.
- **Comparar la frase** con otras similares que la persona recuerda y que contienen ejemplos, para detectar algo que llamamos “patrones” (elementos que se repiten frecuentemente en entornos similares).

Toda consigna puede ser resuelta a través de estrategias variadas. Lo más importante es que cada uno encuentre la que le resulte más efectiva.

Imágenes o íconos: las consignas, en algunas ocasiones, suelen estar acompañadas de imágenes o íconos que se relacionan con lo que se debe hacer. Por ejemplo, suele aparecer la imagen de un lápiz si lo que se debe hacer es escribir, o la imagen de un foco o lamparita si lo que se debe hacer es pensar o proponer ideas.

Las imágenes colaboran con la comprensión de la tarea que se debe ejecutar, pero es muy importante otorgarles un lugar secundario a la hora de decidir cómo resolver la consigna. Guiarse únicamente por las imágenes puede llevar a confusiones o a realizar tareas incompletas.

La principal información para comprender la consigna está en la consigna misma

Observemos qué se solicita con cada uno de los siguientes verbos:

- ➔ *EXPLICAR:* hablar o escribir sobre un tema con el objetivo de que sea entendido por otros.
- ➔ DETERMINAR: es establecer o especificar, llevando algo que se encuentra en un plano poco claro o muy amplio a otro plano en el que está claramente establecido qué es y cómo está comuesto (por ejemplo, esta tarea se realiza en matemática

cuando se solicita que se tome una decisión a un tipo de número, y el estudiante debe determinar si se trata de un número entero)

- ➔ TRANSCRIBIR: tomar información de una fuente (un texto, una tabla, un cuadro) y escribirla en otro lugar tal como se encuentra en su fuente original.
- ➔ SEÑALAR indicar un objeto determinado (se utiliza ampliamente en matemáticas, por ejemplo cuando se solicita indicar con un color el lado de una figura que es más largo)
- ➔ DETECTAR: encontrar algo, visualizar en dónde está (un ejemplo es hallar ciertas palabras en una sopa de letras)
- ➔ COMPLETAR: incorporar algo que no está para que, junto con lo que está, conformen un todo (el ejemplo más común es el de continuar una frase incompleta o rellenar espacios en blanco en un cuadro)
- ➔ MARCAR: hacer una marca indicando un lugar o un punto específico (por ejemplo, en un recuadro que indica la elección de una opción, o en un punto de un mapa o croquis)
- ➔ JUSTIFICAR: explicar las razones por las cuales se ha tomado una decisió determinada (por ejemplo, explicar por qué se elige determinada opción entre otras); para justificar no se debe hacer referencia a los gustos, las creencias o las preferencias (como por ejemplo “porque me gusta”), sino que se bebe apoyar la justificación en los conocimientos sobre el tema tratado.
- ➔ CLASIFICAR: tomar ciertos elementos y establecer a qué grupos o conjuntos pertenecen (es una consigna frecuente en Ciencia Naturales, por ejemplo cuando se debe decidir si un animal es herbívoro o carnívoro)
- ➔ TRANSFORMAR: consiste en modificar un elemento de manera tal que, al finalizar, se haya convertido en otro elemento diferente (es habitual solicitar estas tareas en Lengua, por ejemplo, cuando se le pide al alumno que haga cambios sobre el final de un cuento para que el desenlace sea diferente)

ACTIVIDAD 3: **“*Texto expositivo-explicativo e infografía”***

En este tipo de textos predomina la función referencial del lenguaje, es decir, se entrega información objetiva y veraz mediante una sintaxis precisa y concisa, y con un lenguaje claro, directo y específico. Existen dos tipos de textos informativos: los periodísticos y los expositivos.

Estructura general de un texto expositivo:

Título: informa el tema central del texto de modo sintético.

Subtítulos: sintetizan la idea principal que se expone en uno o más párrafos. Su función es orientar al lector.

Introducción: ubica al lector en el tema y/o en sus propósitos. Invita a seguir leyendo. Se presenta en uno o más párrafos, dependiendo de la extensión del texto.

Cuerpo: en distintos párrafos, se expone y desarrolla la información de interés. Cada párrafo presenta una idea central que se apoya en elementos secundarios. Los párrafos se encadenan entre sí por medio de nexos e ilativos pertinentes. En ocasiones, cuando el contenido del texto lo requiere, se pueden encontrar referencias bibliográficas y citas textuales.

Conclusión o cierre: en uno o más párrafos redondean las ideas principales que se han expuesto a lo largo del texto.

Elementos gráficos: apoyan el contenido del texto. Su objetivo es resaltar, aclarar, explicar, ejemplificar o ampliar la información expuesta mediante distinta tipografía, uso de diferentes colores, incorporación de cuadros explicativos, diagramas de flujo, infografías, ilustraciones, fotografías, etc.

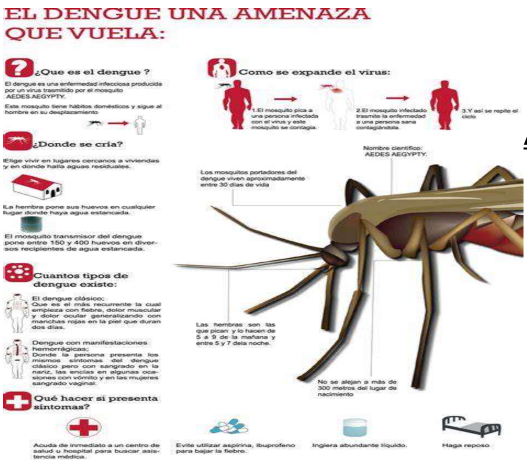
¿Que es una infografía?

Llamamos infografía a la representación grafica de un tema determinado realizado a partir de la combinación de imágenes visuales, diseños y texto. Generalmente el contenido textual se presenta con características descriptivas o narrativas, y en lo posible, las imágenes visuales y los diseños deben ir acorde con el tema.

Este tipo de información grafica es empleada en los diferentes medios de comunicación impresos, como folletos, libros, revistas, periódicos, y también en los medios digitales, en las diferentes páginas de internet.

Características de la infografía

- Debe tener un titulo que vaya de acuerdo con el tema a exponer.
- Se debe dar repuesta a algunas preguntas básicas: qué, quien, cómo, cuando, porque, donde.
- El tema transmitido debe ser comprensible por todos.
- El tema debe ser resumido a los aspectos más importantes del contenido.
- El contenido visual es obligatorio en una infografía.
- Las ilustraciones deben ser congruentes con el contenido.
- El contenido textual debe ser breve y preciso.
- No debe mostrar errores ni contradicciones dentro de su contenido.



Mira la infografía en el siguiente enlace:

https://sl.bing.net/gLQRi9WP4Nw

Actividades:

1. Señala en la infografía anterior sus rasgos distintivos.
2. Busca más información sobre las infografías. (Investiga en el link ttps://www.youtube.com/watch?v=XbxQ2JZ3YLY o similares)
3. Producir un texto expositivo con la información que te brinda el esquema infográfico.

<u>ACTIVIDAD 4:</u> ***"Género: carta formal"***

¿Qué es?

Una carta es un "papel escrito, y ordinariamente cerrado, que una persona envía a otra para comunicarse con ella" (Real Academia Española, 2001, p. 465).

Como todo texto, posee un propósito específico (solicitar, felicitar, reclamar, invitar, etc.) y ciertas convenciones o formato estándar.

¿Por qué es útil?

Tanto en el mundo académico como en el profesional, ya sea por medio escrito o digital, la carta sigue siendo un medio vigente para comunicarse y también una forma de dejar respaldo de la información.

¿Cuál es su estructura?

Consta de cuatro partes básicas:

1.Encabezamiento:
   a) Lugar y fecha (ubicados en el ángulo superior derecho)
   b) Nombre del destinatario (precedido del tratamiento correspondiente)
   c) Cargo del destinatario
   d) Lugar de trabajo o institución
   e) Referencia (objeto de la carta)

2.Saludo (fórmula de tratamiento seguida de dos puntos)

3.Cuerpo (texto organizado en introducción, desarrollo y conclusión)

4.Despedida o cierre (fórmula de despedida, seguida de punto aparte. En las líneas siguientes, se debe escribir la firma y nombre).

ALGUNAS FÓRMULAS UTILIZADAS EN LAS CARTAS FORMALES		
Saludo	**Cierre**	**Despedida**
De mi mayor consideración:	A la espera de sus noticias...	Muy atentamente,
De nuestra mayor consideración:	Quedo a su disposición...	Atentamente,
Estimado señor:	Seguro de su pronta respuesta...	Lo saluda atentamente,
Señores:	Aprovecho la ocasión para saludarlo...	Cordialmente,
Estimado director:	A la espera de su conformidad,	Un respetuoso saludo,
Estimado colega:	Sin otro particular,	Respetuosamente,

Lenguaje de una carta formal:

- La corrección, brevedad y simpleza debe predominar en este tipo de género.
- El 'tono' debe ser sobrio, evitando el trato y contenido emocional.
- El registro debe ser culto formal.
- Evitar, como en cualquier escrito, los errores de ortografía y de sintaxis: ¡dejan una muy mala impresión!

<u>Actividad</u>:

- Escribe una nota a la Directora del IES solicitando la justificación de una inasistencia.

ACTIVIDAD 5: "El texto *argumentativo*"

Cotidianamente nos vemos involucrados en actos en los que las palabras son importantes y hay que tener habilidades y conocimientos para emplear la lengua con eficiencia y propiedad: decir lo que se siente, leer, comprender, resumir, explicar, separar ideas, convencer, ser comprendido, entender lo que explican los otros. Todas estas actividades son actos comunicativos. Las personas, para comunicarse apropiadamente, deben adecuarse a las situaciones y contextos específicos que presenta los diferentes actos de habla, tener en cuenta al receptor (destinatario) de su mensaje, considerar la intención que se propone el emisor: informa r, convencer, expresarse. Muchas veces necesitamos justificar una tardanza, explicar el por qué de una inasistencia al trabajo, manifestar una opinión ante un determinado tema, esgrimir las razones por las que adherimos o no a una determinada medida de fuerza gremial, etc. Para cualquiera de estas situaciones, debemos argumentar, es decir, debemos intentar convencer, persuadir a otros acerca de nuestra idea, opinión, o motivación a través de diferentes argumentos. Pa ra ello, hay que desarrollar ciertas habilidades que nos permitan razonar, justificar, demostrar, explicar, ejemplificar.

Las estrategias retóricas argumentativas:

El análisis de los textos debe centrar su atención en el cuerpo argumentativo, fundamentalmente en las razones que el escritor expone para defender su tesis y en las estrategias empleadas para convencer con más objetividad a su audiencia: la explicación, los argumentos de autoridad, la comparación, descripción, la analogía , recurrir a hechos haciendo uso de testimonios creíbles, datos estadísticos aportados en otros estudios o por organizaciones, entre otros

Actividades:

1. **1.** ¿Cuál es la opinión del autor de cada texto?
   a) “Los problemas en el tránsito”
2. **2.** ¿Cuál es la intención comunicativa del texto?
3. **3.** Elabora un texto con tu opinión al respecto.

Los problemas en el tránsito

Entre los muchos problemas que está enfrentando hoy en día nuestra sociedad, el de los disturbios en el tránsito es uno de los más preocupantes, y todo se debe a que las personas no respetan las leyes del mismo. Por eso, los peatones y conductores son los únicos responsables en solucionar los problemas en el tránsito.

En primer lugar, las leyes ya están hechas, por eso depende de cada uno de nosotros (ya sea como peatón o conductor) respetarlas y de este modo solucionar los problemas en el tránsito. Los accidentes se dan porque las personas cometen una infracción (no respetan los semáforos, circulan a contramano, no ceden la preferencia en las esquinas, conducen a exceso de velocidad, etc.) y no porque las leyes están mal elaboradas. El 99% de los accidentes de tránsito se dan por un error humano, mientras que el 1% restante se dan por algún desperfecto del vehículo, por el clima, caminos resbaladizos, etc. Cada vez es más la gente que comete infracciones en las calles.

Está prohibido el consumo de alcohol si se va a conducir un vehículo, pero a pesar de esto hay muchas personas que consumen alcohol al volante. Está comprobado que el alcohol incide en el 37,5% de los accidentes fatales y en un 16% en los de menor gravedad.

Los accidentes de mayor fatalidad ocurren en la noche debido a que la visibilidad es menor, mucha gente viaja con pocas horas de sueño (quedándose dormidos al volante por unos segundos y esto basta para generar un siniestro de tránsito), hay vehículos andando con las luces apagadas, circulan conductores alcoholizados en mayor cantidad que en el día, etc. La mortalidad en los accidentes diurnos es de un 22%, mientras que la de los nocturnos alcanza un 60%.

Un grave “problema” dentro del tránsito es el poco uso del casco protector. Según estadísticas de cada 10 accidentes, 7 de los afectados resultan seriamente lesionados o muertos por no contar con casco al momento del siniestro, esto nos muestra la grave ausencia del uso del casco a pesar de que las leyes que lo obligan a utilizarlo o los grandes beneficios de tenerlo puesto al momento de tener una caída en la moto. Según el Consejo Nacional para la Prevención de Accidentes las probabilidades de morir en un accidente se incrementan 15 veces cuando se conduce una motocicleta, la protección que ocupa el casco disminuye las posibilidades de morir hasta un 45% y las de sufrir lesiones graves hasta en un 65%.

Por lo tanto no hay nada más cierto que en caso de accidente, el casco es el único elemento de protección capaz de evitar las lesiones en la cabeza, sin duda las más graves. Su uso reduce las muertes en un tercio y evita dos de cada tres lesiones cerebrales, este tipo de lesiones produce el 85% de los muertos y la mitad de los heridos de los accidentes en moto.

Solucionar los problemas en el tránsito depende de cada uno de nosotros. No hay duda.

Facundo Genoud, primero BD, ITSP, 2010

Instituto de Enseñanza Superior “Tafí Viejo”

Belgrano 351 – Tafí Viejo
https://iestv-tuc.infd.edu.ar/sitio/

Profesorado de Educación Secundaria en Física

Resolución Ministerial N° 242/5(Med)

Taller de Nivelación en Matemática

2025

APUNTES TEÓRICOS - PRÁCTICOS

Docentes a cargo:
Prof. Gabriela Cecilia Medina
Prof. Rodrigo Abel Diaz

Simbología matemática de uso frecuente

$=$	igual que	$\in$	pertenece a
$\neq$	distinto de	$\notin$	no pertenece a
$>$	mayor que	$\subset$	contenido en
$<$	menor que	$\subseteq$	contenido o igual a
$\geq$	mayor o igual que	$\not\subset$	no está contenido en
$\leq$	menor o igual que	∡	ángulo
$\equiv$	equivalente a	$\perp$	perpendicular a
$\approx$	aproximadamente	$\parallel$	paralelo a
$\cong$	aproximadamente igual	$\nparallel$	no es paralelo a
$/$	tal que	$\wedge$	y
$:$	tal que	$\vee$	ó
$\therefore$	por lo tanto	$\cap$	intersección
$\forall$	para todo	$\cup$	unión
$\exists$	existe	$\int$	integral
$\exists!$	existe un único	$\iint$	integral doble
$\Rightarrow$	implica	$\iiint$	integral triple
$\Leftrightarrow$	sí y solo si	y'	derivada de y
$\emptyset$	conjunto vacío	$D_x[y]$	derivada de y respecto a x
∞	infinito	$\blacksquare$	fin de demostración
$\frac{dy}{dx}$	derivada de y respecto a x	$\frac{\partial y}{\partial x}$	derivada parcial de y respecto a x
$\mathbb{N}$	conjunto de los naturales	$\mathbb{N}_0$	naturales incluido el 0
$\mathbb{Z}$	conjunto de los enteros	$\mathbb{Q}$	conjunto de los racionales
$\mathbb{I}$	conjunto de los irracionales	$\mathbb{R}$	conjunto de los reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los complejos		

Letras griegas de uso frecuente

α	alfa	ζ	zeta	π	pi	ψ	psi
β	beta	η	eta	ρ	rho	ω	omega
γ	gamma	κ	kappa	σ	sigma	Γ	gamma mayúscula
δ	delta	λ	lambda	τ	tau	Δ	delta mayúscula
ε	épsilon	μ	mu	φ	phi	Σ	sigma mayúscula

UNIDAD N°1: NÚMEROS REALES

Subconjunto de los números reales

El número natural surge por la necesidad que el hombre tiene de contar. Los números 1, 2, 3, 4, 5,… reciben el nombre de ***números naturales*** y al conjunto de estos se los simboliza con $\mathbb{N}$.

Entonces: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots, n, \dots\}$

Se llaman ***opuestos de los naturales*** a los números naturales precedidos del signo menos (-). A este conjunto lo denotamos con $-\mathbb{N}$.

Entonces: $-\mathbb{N} = \{\dots, -n, \dots, -4, -3, -2, -1\}$

El conjunto formado por los opuestos de los naturales, el cero y los naturales, constituye el conjunto de los ***números enteros***: $\mathbb{Z}$.

Por lo tanto: $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Se llaman ***fraccionarios puros*** ($\mathbb{F}$) a aquellos números que pueden escribirse como el cociente entre dos números enteros distintos de cero y tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor.

Ejemplos: $\frac{7}{8}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{9}{7}, \frac{5}{6}$

El conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios puros se denomina conjunto de los ***números racionales:*** $\mathbb{Q}$.

Es decir: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$

Así, un número racional se puede definir como el cociente entre dos números enteros p y q, con q ≠ 0.

Por lo tanto: $\mathbb{Q} = \left\{ x / x = \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z} \;\wedge\; q \in \mathbb{Z} \;\wedge\; q \neq 0 \right\}$

Existen números que no pueden representarse como el cociente entre dos enteros, o sea, no son racionales. Estos números se pueden escribir como una <u>expresión decimal infinita no periódica</u> y se llaman ***números irracionales:*** $\mathbb{I}$.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{17} = 2{,}571281590658 \dots$

$\sqrt{2} = 2{,}571281590658 \dots$

$\pi = 3{,}1415926 \dots$

$e = 2{,}7182 \dots$ (Número de Nepper)

La unión de los conjuntos racionales e irracionales es un nuevo conjunto, el de los ***números reales:*** $\mathbb{R}$

Todo lo antedicho se puede resumir en el siguiente cuadro:

- Reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Naturales ($\mathbb{N}$)
      - 0 (cero)
      - Naturales opuestos ($-\mathbb{N}$)
    - Fraccionarios puros ($\mathbb{F}$)
  - Irracionales ($\mathbb{I}$)

De lo anterior podemos concluir que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{F} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Enunciamos a continuación algunas de las propiedades más importantes que verifican sus elementos.

Propiedades de la igualdad

1) Propiedad reflexiva: $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a = a$

2) Propiedad simétrica: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}: \quad a = b \Rightarrow b = a$

3) Propiedad transitiva: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}: \quad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

4) Propiedad uniforme: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}:$

   i) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

   ii) $a = b \Leftrightarrow a.c = b.c \;\; ; c \neq 0$

Aplicación:

La propiedad que se acaba de enunciar constituye una de las herramientas fundamentales en la resolución de ecuaciones. (Una ecuación es una igualdad en la que intervienen variables y que se verifica para ciertos valores de las mismas).

Ejemplo: Encontrar el valor de x que verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{2 - 3\mathrm{x}}{4} = 8$$

$$\frac{2 - 3x}{4} . 4 = 8 . 4 \qquad \text{(Multiplicando por 4 ambos miembros de la igualdad)}$$

$$2 - 3x = 32$$

$$2 - 3x + (-2) = 32 + (-2) \qquad \text{(Sumando -2 a ambos miembros de la igualdad)}$$

$$-3x = 30$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{30}{-3} \qquad \text{(Dividiendo por } -3 \text{ a ambos miembros de la igualdad)}$$

$$x = -10$$

__Propiedades de las operaciones de Adición y Multiplicación__

1) <u>Propiedad conmutativa:</u> $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} i)\ a+b=b+a \\ ii)\ a.b=b.a \end{cases}$

2) <u>Propiedad asociativa:</u> $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} i)\ (a+b)+c=a+(b+c) \\ ii)\ (a.b).c=a.(b.c) \end{cases}$

3) <u>Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición:</u>

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} i)\ (a+b).c=a.c+b.c & \text{distributiva por derecha} \\ ii)\ c.(a+b)=c.a+c.b & \text{distributiva por izquierda} \end{cases}$

4) <u>Existencia de elementos neutros:</u> Existen dos números reales y distintos, el 0 y 1 tales que: $\forall a \in \mathbb{R}$; se verifica que:

$a+0=a$; $0 \Leftrightarrow$ es el neutro aditivo

$a.1=a$; $1 \Leftrightarrow$ es el neutro multiplicativo

Es decir: $\exists 0 \in \mathbb{R} \ / \ \forall a \in \mathbb{R}$: $a+0=0+a=a$

$\exists 1 \in \mathbb{R} \ / \ \forall a \in \mathbb{R}$: $a.1=1.a=a$

5) <u>Existencia de elementos inversos:</u>

$a)$ $\forall a \in \mathbb{R}, \exists!\,(-a) \in \mathbb{R} \ / \ a+(-a)=0$ "$-a$" se llama inverso aditivo u opuesto de “a”

<u>Ejemplos:</u>

$9+(-9)=0 \Rightarrow -9$ es el opuesto de 9

$-9+9=0 \Rightarrow 9$ es el opuesto de -9

$b)$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{R} \ / \ a.a^{-1}=1$ $a^{-1}=\frac{1}{a}$ se llama inverso multiplicativo o recíproco de "a"

Por lo tanto: **0 (cero) NO TIENE RECÍPROCO**

<u>Ejemplos:</u>

$9.9^{-1}=1 \Rightarrow 9.\frac{1}{9}=1 \Rightarrow 9^{-1}$ es el recíproco de 9

$9^{-1}.9=1 \Rightarrow \frac{1}{9}.9=1 \Rightarrow 9$ es el recíproco de 9^{-1}

Definición: Sustracción
Dados dos números reales a y b, si existe un único número real "x" tal que $a+x=b$ entonces $x=b-a$ y se llama "diferencia entre b y a".

Se puede demostrar que $b-a=b+(-a)$, o sea que la diferencia entre "b" y "a" es igual a la suma de "b" y el opuesto de "a".

Ejemplos: $a)\ 7-3=7+(-3)=4$ $\quad b)3-7=3+(-7)=-4$

Definición: División
Dados dos números reales a y b con$a \neq 0$, si existe un único número real "x" tal que $a.x=b$ entonces $x=\frac{b}{a}$ y se llama "cociente entre b y a"

Se puede demostrar que: $\frac{b}{a}=b.a^{-1}, a \neq 0$ o sea que el cociente entre "b" y "a" es igual al producto de "b" por el recíproco de "a".

Ejemplo: $\frac{6}{5}=6\,.\,5^{-1}=6\,.\frac{1}{5}$

Resultados importantes
$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ se verifica que:

$i)\ \frac{a}{a}=1$ porque a. 1 = a por definición

$ii)\ \frac{0}{a}=0$ porque a. 0 = 0 por definición

$iii)\ \frac{a}{0}$ no está definido porque no existe ningún número que multiplicado por 0 sea igual a "a".

$iv)\ \frac{0}{0}$ no se puede resolver, porque existen infinitos números que multiplicados por 0 dan como resultado 0. En este caso, se dice que el cociente $\frac{a}{b}$ toma la "forma indeterminada $\frac{0}{0}$".

Definición: potenciación
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ se define la potencia enésima de "a", como el producto de "n" factores iguales a "a". Es decir:

$$a^n=\underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{\text{n veces}}$$

Donde: "a" se llama "base de la potencia", "n" se llama "exponente de la potencia" y "a^n" se llama "potencia enésima de a"

Definición: Para todo número real a distinto de cero, valen:

$$i)\ a^0=1 \qquad ii)\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ \text{, con } n \text{ número natura}$$

Propiedades de la Potenciación

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces valen las siguientes propiedades:

1) Producto y cociente de potencias de igual base:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \qquad \text{y} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

$$2^3 .\ 2^2 = 2^{3+2} \qquad y \qquad \frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2}$$

$$8 . 4 = 2^5 \qquad \frac{27}{9} = 3^1$$

$$32 = 32 \qquad 3 = 3$$

2) Potencia de potencia

$$(a^m)^n = a^{m . n}$$

Ejemplo:

$$(2^2)^3 = 2^{2 . 3}$$

$$4^3 = 2^6$$

$$64 = 64$$

3) Propiedad distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente:

$$(a . b)^m = a^m . b^m \qquad y \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Ejemplos:

$$(2 . 3)^2 = 2^2 . 3^2 \qquad y \qquad \left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3}$$

$$6^2 = 4.9 \qquad y \qquad 2^3 = \frac{64}{8}$$

$$36 = 36 \qquad y \qquad 8 = 8$$

IMPORTANTE:

a) La potenciación **no** es **distributiva** respecto de la **suma** y de la **diferencia**.

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

Ejemplo: $(4+3)^2 \neq 4^2 + 3^2$ $\qquad$ $(4-2)^2 \neq 4^2 - 2^2$

$$7^2 \neq 16 + 9 \qquad 2^2 \neq 16 - 4$$

$$49 \neq 25 \qquad 4 \neq 12$$

b) La potenciación **no** es **asociativa**

$$a^{m^n} \neq (a^m)^n$$

Ejemplo: $2^{3^2} \neq (2^3)^2$

$2^9 \neq 2^8$

$512 \neq 64$

Observa que para probar que una afirmación es falsa se ha dado un ejemplo en el cual la afirmación no se cumple.

Definición: radicación

Dado un número real "a" y un número "n" entero positivo mayor que uno, se llama raíz enésima de "a" a otro número real "x" tal que "x" elevado a la "n" es igual a "a".Es decir:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \ \sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

Donde: "n" es el "índice de la raíz", "x" es la "raíz enésima de a" y "a" es el "radicando"

Analicemos los siguientes casos:

1) a) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$ b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = 8$

Observación: Si el **índice** es **impar**, la **raíz real es única** y del mismo signo que el radicando.

2) a) $\sqrt{4} = \pm 2$ porque $\begin{cases} (+2)^2 = 4 \\ (-2)^2 = 4 \end{cases}$ b) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ porque $\begin{cases} (+3)^4 = 81 \\ (-3)^4 = 81 \end{cases}$

Observación: Si el **índice** es **par** y el radicando positivo, existen **dos raíces reales opuestas.** Sin embargo, elegimos, en este caso, como resultado la raíz positiva a la cual denominamos "raíz principal" o "raíz aritmética".

$$\therefore \sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt[4]{81} = 3$$

3) $\sqrt{-9} = x \Rightarrow x^2 = -9$ No existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -9.

$\therefore \sqrt{-9}$ No tiene solución en $\mathbb{R}$ o no está definida en $\mathbb{R}$.

Observación: **Ninguna raíz de índice par y radicando negativo tiene solución en $\mathbb{R}$.**

Propiedades de la Radicación

$\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall n, m \in \mathbb{N}$ y con la condición de que si m y n son números pares entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$; valen las siguientes propiedades:

Propiedad 1: $\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$

Propiedad 2: $\sqrt[n]{a\,:\,b} = \sqrt[n]{a}\,:\,\sqrt[n]{b}$

Propiedad 3: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,.\,n]{a}$

Propiedad 4: $\sqrt[n\,.\,p]{a^{m\,.\,p}} = \sqrt[n]{a^m}$, p ∈ N

Ejemplos:

$a)\ \sqrt[3]{27\,.\,(-125)} = \sqrt[3]{27}\,.\sqrt[3]{-125} = 3.(-5) = -15$

$b)\ \sqrt[3]{-2}.\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$c)\ \sqrt[4]{256 : 16} = \sqrt[4]{256}\,.\sqrt[4]{16} = 4 : 2 = 2$

$d)\ \dfrac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{\dfrac{144}{9}} = \sqrt[4]{16} = 2$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

$f)\ \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[2\,.\,3]{4} = \sqrt{4} = 2$

$g)\ \sqrt{8} = \sqrt{4\,.\,2} = \sqrt{4}\,.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$h)\ \sqrt[3]{-24} = \sqrt[3]{(-8).3} = \sqrt[3]{-8}\,.\sqrt[3]{3} = -2\,\sqrt[3]{3}$

IMPORTANTE:

a) La radicación **no** es **distributiva** respecto de la adición ni de la sustracción:

$$\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$$a)\ \left.\begin{array}{c} \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$b)$ Si $x = \sqrt{4}$, entonces $x = 2$ (raíz principal).

Si $x^2 = 4$, entonces $x = \pm 2$, es decir $x = 2$ ó $x = -2$.

$c)$ $\sqrt[4]{(-3)^4}$, no se puede simplificar, ya que $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$.

$d)$ $\sqrt[12]{(-3)^6}$, no se puede simplificar. De hacerlo quedaría $\sqrt{(-3)}$, que no está definida.

Podes **simplificar** cuando la **base** de la potencia es **no negativa**. Por lo tanto:

$$\text{Si } a \geq 0, \text{ entonces } \sqrt[n]{a^n} = a$$

Operaciones con radicales

Consideraremos solamente las operaciones que se presentan con mayor frecuencia. Definimos previamente el siguiente concepto:

Radicales semejantes: son aquellos radicales que tienen el mismo índice y radicando.

Ejemplos:

$a)$ $3.\sqrt{2}$ y $-5.\sqrt{2}$, son radicales semejantes cuyos coeficientes son 3 y -5 respectivamente.

$b)$ $-\frac{3}{2}\,.\,a\,.\sqrt[3]{b^2}$ y $\sqrt[3]{b^2}$ son radicales semejantes cuyos respectivos coeficientes son $-\frac{3}{2}\,.\,a$ y 1.

Suma algebraica de radicales

La suma algebraica de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los radicales dados.

Ejemplos:

$$a)\ 2.\sqrt{5} + \sqrt{5} - \frac{1}{3}.\sqrt{5} = \left(2 + 1 - \frac{1}{3}\right).\sqrt{5}$$

$$= \frac{8}{3}.\sqrt{5}$$

b) $2.\sqrt[3]{81} - 4.\sqrt[3]{24}$

Aplicando propiedades, reducimos los radicales de la expresión dada a radicales semejantes:

$$\begin{aligned}
2.\sqrt[3]{81} - 4.\sqrt[3]{24} &= 2.\sqrt[3]{3^4} - 4.\sqrt[3]{2^3\,.\,3} \\
&= 2.\sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{3} - 4.\sqrt[3]{2^3}\,.\sqrt[3]{3} \\
&= 2.3.\sqrt[3]{3} - 4.2\,.\sqrt[3]{3} \\
&= 6.\sqrt[3]{3} - 8.\sqrt[3]{3} \\
&= (6-8).\sqrt[3]{3} \\
&= -2.\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

$c)\ \sqrt{2}+2.\sqrt[4]{25}-\sqrt{8}+\sqrt{45}=\sqrt{2}+2.\sqrt[4]{5^2}-\sqrt{2^3}+\sqrt{3^2\,.5}$

$$=\sqrt{2}+2.\sqrt{5}-2.\sqrt{2}+3.\sqrt{5}$$

$$=\left(\sqrt{2}-2.\sqrt{2}\right)+(2.\sqrt{5}+3.\sqrt{5})$$

$$=(1-2).\sqrt{2}+(2+3).\sqrt{5}$$

$$=-\sqrt{2}+5.\sqrt{5}$$

Cuando **los radicales no se pueden reducir** a radicales semejantes, la **operación queda indicada.**

Racionalización del divisor

Se llama racionalización de una expresión fraccionaria al procedimiento mediante el cual se logra que el denominador sea un número racional. Consideremos los siguientes casos:

1) El denominador es un monomio que contiene un radical.

a) El radical es cuadrático

Ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

¿Por qué número debemos multiplicar 5 para obtener un número racional? Observemos que:

$\sqrt{5}.\sqrt{5}=\sqrt{5.5}=\sqrt{5^2}=5$

Entonces si se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{5}$, el cociente dado no se altera y el denominador queda racionalizado

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\ \sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2.\sqrt{5}}{5}$$

Denominador Irracional   Denominador Racional

b) El radical es no cuadrático

En este caso conviene multiplicar por otro radical del mismo índice que el del denominador, de tal modo que en el radical que se obtenga, todos los exponentes de las potencias del radicando sean múltiplo del índice.

Ejemplos

$i)\ \sqrt[5]{\dfrac{32}{7^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{2}{\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{2.\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3}\,.\sqrt[5]{7^2}} = \dfrac{2.\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \dfrac{2.\ \sqrt[5]{7^2}}{7}$

$ii)\ \dfrac{x}{\sqrt[3]{a.\ \ b^6.\ c^8}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2.\ c}$. El exponente de b no se modifica pues es múltiplo de 3.

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a.\ \ b^6.\ c^8}} = \frac{x.\sqrt[3]{a^2.c}}{\sqrt[3]{a.\ \ b^6.\ c^8}.\sqrt[3]{a^2.c}} = \frac{x.\sqrt[3]{a^2.c}}{\sqrt[3]{a^3.\ \ b^6.\ c^9}} = \frac{x.\sqrt[3]{a^2.c}}{a.b^2.c^3}$$

<u>**Conclusión:**</u> Cuando el denominador es un monomio que contiene un radical, siempre es posible la racionalización, **multiplicando numerador y denominador por una misma expresión convenientemente elegida.**

<u>2) El denominador es un binomio que contiene radicales.</u>

<u>Ejemplos:</u>

$a)\ \dfrac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

¿Por qué número debemos multiplicar $(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ para obtener un número racional?

Multiplicamos por un número tal que, en el resultado aparezcan ambos radicales elevados al cuadrado para poder simplificarlos.
Para ello, utilizamos el siguiente resultado: $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$.

En consecuencia, en el ejemplo dado multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ (conjugado de $\sqrt{7} - \sqrt{3}$).

$$\underbrace{\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}_{\text{Denominador Irracional}} = \frac{2\ .\ (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})\ .\ (\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{2\ .(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,)}{(7)^2 - (3)^2} = \frac{2\ .(\sqrt{7} + \sqrt{3}\,)}{7-3} = \underbrace{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}}_{\text{Denominador Racional}}$$

b) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(1-\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})} = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1^2+2.1.(-\sqrt{2})+(-\sqrt{2})^2}{1-2}$

$= \dfrac{1-2.\sqrt{2}+2}{-1} = \dfrac{3-2.\sqrt{2}}{-1} = -3+2.\sqrt{2}$

<u>Definición</u>: Potencia de exponente racional

$\forall a \in \mathbb{R};\ \forall m,n \in \mathbb{N}, n > 1, (a \geq 0$ si n es par$)\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

<u>Ejemplos:</u>

$a)\ 8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ ó $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{64} = 4$

$b)\ (-27)^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$

$c)\ (-16)^{\frac{3}{4}}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$ pues:

$(-16)^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{-16})^3\ y\ \sqrt[4]{-16}$ no está definida en $\mathbb{R}$, o bien como $a = -16 < 0$ y $n = 4 \Rightarrow (-16)^{\frac{3}{4}}$ no está definida en $\mathbb{R}$.

Las propiedades de la potenciación enunciadas para exponentes enteros resultan válidas para exponentes racionales.

Por último, extendemos nuestra definición de exponentes negativos a <u>exponentes racionales.</u>

<u>Definición</u>: Potencia de exponente racional

Si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0; p,q \in \mathbb{N}$ entonces $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ con $a > 0$ si q es par

<u>Ejemplos:</u>

$a)\ 16^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{16^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{4}$

$b)\ \left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{81}{25}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\dfrac{25}{81}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\dfrac{25}{81}}\right)^3 = \left(\dfrac{5}{9}\right)^3 = \dfrac{125}{729}$

TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD N°1: NÚMEROS REALES

1) i) Clasifique los siguientes números en racionales o irracionales.
ii) Si es racional, diga a qué subconjunto pertenece.

$a)\ -\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \sqrt{5}$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)\ 2{,}5$ $\quad e)\ 0,\hat{6}$ $\quad f)\ -3$

$g) 0{,}123456\ldots$ $\quad h)\ 0{,}82727$ $\quad i)\ \sqrt{4}$ $\quad j)\ \pi$ $\quad k)\ -4{,}025$ $\quad l)\ 2{,}010010001$

2) Califique con V (Verdadera) o F (falsa) las siguientes afirmaciones:

$a)\ \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$ $\quad b)\ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ $\quad c)\ a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

$d)\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$ $\quad e)\ \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ $\quad f)\ \mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \mathbb{R}$

$g)\ \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\quad h)\ 0{,}38217\ldots \in \mathbb{I}$ $\quad i)\ a \in \mathbb{I} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$

$j)\ \mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\quad k)\ a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$ $\quad l)\ \sqrt[5]{-32} \in \mathbb{I}$

3) Representa aproximadamente sobre la recta real los siguientes números:

$$2;\ -5;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{1}{4};\ \sqrt{2}\,;\ 1-\sqrt{2}\ ;\ \frac{7}{2};\ \sqrt{3}\,;\ \pi$$

4) Escribir en lenguaje simbólico:

a) Tres números enteros consecutivos.
b) Un número impar.
c) Dos números pares consecutivos.
d) El opuesto de un número.
e) El inverso de un número distinto de cero.
f) 2 es menor que 10.
g) 7 es mayor que 5.
h) a es menor o igual que 5.
i) n es menor o igual que b.
j) a no es menor que b.
k) a no es mayor que b.
l) a no es igual a b.
m) x está comprendido entre 1 y 2.
n) x está comprendido entre 4 y 6 o es igual a 6.
o) x está comprendido entre 4 y 6 o es igual a 4 o es igual a 6.

5) Se reparten $ 63.000 entre tres personas de modo que la primera persona tiene el doble de la segunda y la tercera persona 2/3 del total de las otras dos. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

6) Tres recipientes contienen agua, el primero 50/47 litros, el segundo 62/55 litros y el tercero 33/30 litros, ¿Qué recipiente contiene menos agua y cuál más?

7) Escribe dos números racionales comprendidos entre 2/5 y 3/5. ¿Cuántos números racionales hay entre 2/5 y 3/5?

8) ¿Cuántos números irracionales existen entre 1/2 y 67/5?

9) Califica con verdadero o falso. Justifica tu respuesta.

$a)\ \frac{3}{2} + a = a + \frac{3}{2}$ $\qquad$ $b)\ \left(-\sqrt{2}\right)(5 - b) = -5\sqrt{2} + 5b$

$c)\ 2 + 3 \,.\, 4 = 20$ $\qquad$ $d)\ 2 + 3 \,.\, 4 = 14$

$e)\ a \,.\, 7 = (a \,.\, 5) + (2 \,.\, a)$ $\qquad$ $f)\ \frac{1}{5} + b + (-b).3 + 2 = \frac{1}{5} + 5$

$g)\ 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = (2.3) + (2 \,.\, 5)$ $\qquad$ $h)\ \frac{7+5}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}$

$i)\ \frac{2}{7+5} = \frac{2}{7} + \frac{2}{5}$ $\qquad$ $j)\ \frac{5+3}{2+3} = \frac{5}{2}$

10) Diga para qué valores de x se verifica que:

$a)\ \frac{3}{x-2}$ está definida $\qquad$ $b)\ \frac{x+5}{4} = 0$

$c)\ \frac{x}{x} = 1$ $\qquad$ $d)\ \frac{x-8}{2} = 0$

$e)\ 4\,x^{-1}$ está definida $\qquad$ $f)\ \frac{x+(-x)}{3} = 0$

$g)\ \frac{3}{x+(-x)} = 0$ $\qquad$ $h)\ \frac{2x-3}{4}$ está definida

$i)\ \frac{0}{x-1}$ está definida $\qquad$ $j)\ (x-3)^{-1}$ está definida

$k)\ \frac{4}{x+(-x)}$ está definida $\qquad$ $l)\ \frac{0}{x-5} = 0$

11) De las siguientes expresiones señala las que son iguales a 2:

$$a)\ \frac{\frac{2}{3}}{3} \qquad b)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad c)\ \frac{1}{0.5} \qquad d)\ \sqrt{4} \qquad e)\ \sqrt{25-9} \qquad f)\ \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}$$

12) Calcule:

$a)\ (-2)^3$ $\qquad b)\ \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$ $\qquad c)\ \left(3x^2+\frac{1}{2}\right)^0$

$d)\ (-1)^2 : (-1)^{-6}$ $\qquad e)\ (5^n)^2 \,.\, (5^n)^{-2}$ $\qquad f)\ (4^2.16^3) :\ 4^6$

$g)\ \frac{-7^2}{(1-8)^3}$ $\qquad h)\ 27^{n-1}.3^{2n}$ $\qquad i)\ 6^{n+1}-5.6^n$

13) Halle el valor de las siguientes expresiones. Exprese las respuestas sin exponentes negativos:

$a)\ (-a)^4\ (-a)^3$ $\qquad b)\ (-a)^4 : (-a)^3$

$c)\ (a^3\ b^{-2})^{-3}\ (a^2\ b^{-2})^0\ (a^{-2}\ b^{-1})^{-1}$ $\qquad d)\ \left(\frac{3\ x^{-2}\ y}{4\ x^2 y^{-5}}\right)^{-2}$

$e)\ \left(\frac{2\ x^{-2} y}{a^{-1}}\right)^{-1}$ $\qquad f)\ \left[\left(\frac{a^{-5}}{b^{-2}}\right)^4 \left(\frac{a^{-3}}{b^{-4}}\right)^5\right]^{-3}$

$g)\ \frac{(a^{3n-1}.\ b^{2n-1})^4}{(ab)^{2n-4}}$ $\qquad h)\ \frac{x^{n+1}-\ x^n}{x^n}$

14) ¿Para qué valores de a$\in\Re$ son ciertas las siguientes expresiones? :

$a)\ a\ \geq a$ $\qquad b)\ a\ < a-1$ $\qquad c)\ a\ > (-a)$ $\qquad d)\ \frac{a}{a}=1$

$e)\ \frac{1}{a}<1$ $\qquad f)\ \sqrt{a}\ > 0$ $\qquad g)\ \sqrt{a^2}\ \leq 0$

15) Califique con verdadera o falsa las siguientes proposiciones justificando en cada caso su elección:

$a)\ \sqrt{64+36}\ =\ \sqrt{100}$ $\qquad b)\ \sqrt{64+36}\ =\ \sqrt{64}\ +\ \sqrt{36}$ $\qquad c)\ \sqrt{64.36}\ =\ \sqrt{64}\ .\sqrt{36}$

$d)\ \sqrt{\sqrt[3]{a}}\ =\ \sqrt[5]{a}$ $\qquad e)\ \sqrt[3]{4}\ .\sqrt[3]{6}\ =\ \sqrt[3]{24}$ $\qquad f)\ \sqrt[3]{-\frac{m^3}{n^3}}\ =\ \frac{m}{n}\ , n\ \neq 0$

$g)\ \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$ $\qquad h)\ \sqrt{72} = 6.\sqrt{2}$

16) Resolver:

$a)\ [(-9)^2]^{\frac{1}{2}}$ $\qquad b)\ \left[(-9)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

$c)\ (5^2 - 4^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad d)\ (5^2.4^2)^{\frac{1}{2}}$

$e)\ (5^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f)\ \left(a^{1/2} + b^{1/2}\right)^0$

$g)\ 32^{\frac{3}{10}}.32^{\frac{3}{5}}.32^{\frac{1}{2}}$ $\qquad h)\ \frac{8^{\frac{2}{3}}.\ 8^{-\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$

$i)\ \left[(0{,}01)^{\frac{5}{4}}\right]^{-2}\left[(0{,}01)^{-\frac{4}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}}$ $\qquad j)\ (16\,a^2\,b^4)^{\frac{1}{2}}\,(2\,a^{-2})$

$k)\ \frac{(10^2)^{-3}(10^3)^{\frac{1}{6}}}{10^{\frac{1}{2}}.(10^4)^{-\frac{1}{2}}}$ $\qquad l)\ \left[a^{-\frac{2}{5}}.\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^6\right]^{\frac{1}{4}}$

$m)\ \frac{(x+y)^{\frac{2}{3}}.\ (x+y)^{-\frac{1}{6}}}{[(x+y)^2]^{\frac{1}{4}}}$ $\qquad n)\ (0{,}027)^{-\frac{1}{3}} + (256)^{0{,}75} - 3^{-1} + (4{,}5)^0$

17) Demuestre que:

$a)\ (14.2^3 - 6.2^3 + 8.2^3)^3 = 2^{21}$ $\qquad b)\ \frac{(4^{n-1})^n}{(4^{n+1})^n} = \frac{1}{4^{2n}}$

$c)\ \sqrt{\frac{4^n.6}{4^{2n+1} + 2^{4n+1}}} = \frac{1}{4}$ $\qquad d)\ \left(\frac{x^{2n-3}\,y^{n-1}}{x^{2n-2}\,y^{n-2}}\right)^3 = \frac{y^3}{x^3}$

$e)\ \frac{81^{\frac{3}{4}}.(3^n)^4}{9^3.27^{n-2}} = 3^{3+n}$ $\qquad f)\ \frac{16^{n+1}}{4^{2n}.32 + 8^{n-1}.2^{n+7}} = \frac{1}{3}$

UNIDAD N°2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición: Expresión Algebraica

Una expresión algebraica es expresión en la que se relacionan variables y constantes (números reales), vinculadas entre sí por un número infinito de operaciones como ser adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos: $2xy + 3x^{-2}$ $\qquad \dfrac{-2+a^3}{1-\sqrt{2x}}$ $\qquad \pi . r^2$

Observaciones:

- Se denominan variables a las letras que figuran en las expresiones algebraicas, estas se utilizan para representar de forma genérica a números reales.
- Si en una expresión algebraica se sustituyen las variables por números fijos y se realizan las operaciones indicadas en la misma, se obtiene un valor numérico de la expresión algebraica.

En $\dfrac{-2+a^3}{1-\sqrt{2x}}$, si $a = -3 \wedge x = 2 \Rightarrow \dfrac{-2+(-3)^3}{1-\sqrt{2.2}} = \dfrac{-2-27}{1-2} = \dfrac{-29}{-1} = 29$

Definición: Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresión Algebraica Entera: son expresiones en donde las variables están afectadas solo por operaciones de suma, resta, multiplicación y potencia natural. Este tipo es comúnmente llamado Polinomio.

Ejemplo: $a^2 + 5xy^2 - 3^{-5}$ $\qquad a^2 - a + \sqrt{2}$

Expresión Algebraica Fraccionaria: son expresiones en donde las variables figuran en el denominado de una fracción o tienen potencia con exponente entero negativo.

Ejemplo: $\dfrac{3x+1}{-2y} - 2x$ $\qquad a^{-2} - a + 1$

Expresión Algebraica Irracional: son expresiones en donde las variables están afectadas por operaciones de radicación o tienen potencia con exponente racional no entero.

Ejemplo: $3\sqrt{x+1} - xy$ $\qquad \dfrac{-1+x^{-\frac{4}{3}}}{3x+4}$

Observaciones

Una de las aplicaciones de las expresiones algebraicas consiste en expresar generalidades, fórmulas, propiedades, simplificar expresiones.

Lenguaje coloquial y Lenguaje simbólico

El lenguaje simbólico en matemática es aquel que utiliza signos, números y símbolos para expresar relaciones y operaciones de manera precisa y universal. Es el lenguaje formal de la matemática, ya que evita ambigüedades y permite representar conceptos de forma clara y concisa. Por otro lado, el lenguaje coloquial es el que usamos en la vida diaria para explicar ideas matemáticas con palabras comunes. Aunque puede ser útil para comprender conceptos, a veces puede ser impreciso o ambiguo. A continuación, se debe algunos ejemplos:

Lenguaje Simbólico	Lenguaje Coloquial
x	Un número cualquiera
$x+1$	El siguiente (consecutivo) de un número o un número aumentado en una unidad
$x-1$	El anterior (antecesor) de un número o un número disminuido en una unidad
$x+(x+1)$	La suma entre un número y su consecutivo
$x-5$	La diferencia entre un número y cinco o un número disminuido en cinco
$x.y$	El producto entre dos números
$2x$	El doble de un número
$x.y$	El producto entre dos números
$\frac{2x}{x-1}$	El cociente ente un número y su anterior
x^2	El cuadrado de un número
$(2x)^{-1}$	El reciproco del doble de un número
$\sqrt[5]{2x-1}$	La raíz quinta de la diferencia entre el doble de un número y uno
$\vdots$	$\vdots$

Definición: Monomio

Un monomio es una expresión algebraica de un solo termino cuyas variables son potencias de exponente natural o cero.

Ejemplo: $-5x^2yz^3$

Definición: coeficiente, parte literal y grado de un monomio

Se denomina "coeficiente" al factor numérico del monomio y "parte literal" a las variables con sus exponentes. El "grado" de un monomio es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su parte literal.

En el ejemplo anterior -5 es el coeficiente, x^2yz^3 es la parte literal y el grado del monomio es $2+1+3=6$

Definición: monomios semejantes
Dos o más monomios son semejantes si y solo si tienen la misma parte literal.
Ejemplo: los siguientes monomios son semejantes

$$\frac{1}{2}xy^2 \ ; \ \sqrt{5}\,xy^2 \ ; \ -2xy^2$$

Definición: Operaciones con monomios
a) Suma y resta de monomios: la suma y resta de monomios solo se puede realizar cuando los monomios son semejantes. Para sumar o restar monomios semejantes se suman o restan los coeficientes de los monomios dados y se deja la misma parte literal.
Ejemplo: dados los monomios $-5xy^2$; $4xy^2$ la suma y la resta de ellos está dado por

$$-5xy^2 + 4xy^2 = (-5+4)xy^2 = -xy^2$$

$$-5xy^2 - 4xy^2 = (-5-4)xy^2 = -9xy^2$$

b) Producto de monomios: el producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados y cuya parte literal es el producto de las partes literales.
Ejemplo: dados los monomios $-5xy^2$; $4x^3t$ el producto de ellos está dado por

$$-5xy^2.4x^3t = (-5.4).(xy^2.x^3t) = -20x^{1+3}y^2t = -20x^4y^2t$$

c) Cociente de monomios: el cociente de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes de los monomios dados y cuya parte literal es el cociente de las partes literales.
Ejemplo: dados los monomios $-5xy^2$; $4xy$ el cociente de ellos está dado por

$$-5xy^2:4xy = (-5:4).\left((xy^2):(xy)\right) = -\frac{5}{4}x^{1-1}y^{2-1} = -\frac{5}{4}x^0y^1 = -\frac{5}{4}y$$

Definición: Expresión algebraica entera en una variable (Polinomio)
Un polinomio en una variable con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$

Donde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales llamados coeficientes del polinomio.
- n es un número entero no negativo (puede ser cero) llamado grado del polinomio (si $a_n \neq 0$)y se denota $gr(P) = n$ (es el mayor exponente de la potencia x)
- x es la variable o indeterminada del polinomio.
- El polinomio P es la suma algebraica de monomios no semejantes.

Observaciones:

- Los polinomios se denotan por letras de nuestro alfabeto mayúscula $P, Q, R, \ldots$, entre paréntesis se explicita cuál es su variable $P(x), Q(t), R(a), \ldots$

- El coeficiente a_n debe ser distinto de cero y se llama coeficiente principal (es el coeficiente del término con mayor potencia de x). Si el coeficiente principal es 1 el polinomio se denomina Mónico.

- El coeficiente a_0 se denomina término independiente (es el término de no depende de x).

- El polinomio puede estar ordenado (en forma creciente o decreciente), o desordenado. Si el polinomio está escrito de forma que figuran todos los coeficientes (incluso los nulos) y con exponentes de la variable en orden creciente, se dice que el polinomio está ordenado y completo de forma creciente. Análogamente, si figuran todos los coeficientes (incluso los nulos) y los exponentes de la variable están en orden decreciente, se dice que el polinomio está ordenado y completo de forma decreciente

- Si todos los coeficientes son nulos, incluso a0, el polinomio no tiene grado y se llama polinomio nulo.

Definición: Clases de polinomios
Una expresión algebraica entera puede clasificarse según el número de términos que tenga:

- Un binomio es la suma algebraica de dos monomios no semejantes.
  Ejemplo: $-5x^2yz^3 + \sqrt{2}\, c^2t^2$; $5\, t^2 - ct$

- Un trinomio es la suma algebraica de tres monomios no semejantes
  Ejemplo: $-5x^2yz^3 + \sqrt{2}\, c^2t^2 + 5\, t^2$

- Un cuatrinomio es la suma algebraica de cuatros monomios no semejantes
  Ejemplo: $-5x^2yz^3 + \sqrt{2}\, c^2t^2 + 5\, t^2 - ct$

Definición: Igualdad de polinomios
Dado dos polinomios, diremos que los polinomios son iguales si y solo si tienen el mismo grado y sus coeficientes con iguales respectivamente entre sí.

Simbólicamente:
Dados los polinomios $A(x) = a_n.x^n + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ y $B(x) = b_n.x^m + \cdots + b_2.x^2 + b_1.x + b_0$

$$A(x) = B(x) \iff n = m \wedge a_n = b_n \wedge \ldots \wedge a_2 = b_2 \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0$$

O bien $A(x) = B(x) \iff n = m \wedge a_i = b_i \;\; \forall i = 1,2,\ldots,n$

Definición: Polinomios opuestos
Dado dos polinomios, diremos que los polinomios opuestos si y solo si tienen el mismo grado y sus coeficientes son respectivamente opuestos entre sí.

Simbólicamente:
Dados los polinomios $A(x) = a_n.x^n + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ y $B(x) = b_n.x^m + \cdots + b_2.x^2 + b_1.x + b_0$

$$A(x) \text{ es opuesto a } B(x) \iff n = m \wedge a_n = -b_n \wedge \ldots \wedge a_2 = -b_2 \wedge a_1 = -b_1 \wedge a_0 = -b_0$$

O bien $A(x)$ es opuesto a $B(x) \Leftrightarrow n = m \wedge a_i = -b_i \quad \forall i = 1,2,\dots,n$

De lo anterior, dado el polinomio $A(x)$ su opuesto es $-A(x)$

<u>Definición</u>: operaciones entre polinomios

a) Suma de polinomios: la suma de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ es otro polinomio $C(x)$ cuyos términos son la suma de los monomios semejantes de los polinomios dados y los monomios no semejantes.

Ejemplo: Dados los polinomios $A(x) = -3x^2 + 9$ y $B(x) = 3x^3 + 5 - 2x^2 + 3x$

$$A(x) + B(x) = (-3x^2 + 9) + (3x^3 + 5 - 2x^2 + 3x)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 3x + 14$$

$$\begin{array}{rr} & -3x^2 + 0x + 9 \\ + & 3x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \\ \hline & 3x^3 - 5x^2 + 3x + 14 \end{array}$$

b) Diferencia de polinomios: la diferencia de polinomios $A(x)$ y $B(x)$, en ese orden, es otro polinomio $C(x)$ que se obtiene al sumarle a $A(x)$ el opuesto de $B(x)$. Esto es $A(x) - B(x) = A(x) + \big(-B(x)\big)$

Ejemplo: Dados los polinomios $A(x) = -3x^2 + 9$ y $B(x) = 3x^3 + 5 - 2x^2 + 3x$

$$A(x) - B(x) = (-3x^2 + 9) - (3x^3 + 5 - 2x^2 + 3x)$$
$$= (-3x^2 + 9) + (-3x^3 - 5 + 2x^2 - 3x)$$
$$= -3x^3 - 1x^2 - 3x + 4$$

$$\begin{array}{rr} & -3x^2 + 0x + 9 \\ + & -3x^3 + 2x^2 - 3x - 5 \\ \hline & -3x^3 - 1x^2 - 3x + 4 \end{array}$$

c) Producto de polinomios: el producto de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ es otro polinomio $C(x)$ que se obtiene al multiplicar todos los términos de $A(x)$ por todos los términos de $B(x)$ y luego operar los términos semejantes, si es que los hubiera.

Ejemplo: Dados los polinomios $A(x) = -3x^2 + 9$ y $B(x) = -2x^2 + 3x$

$$A(x).B(x) = (-3x^2 + 9).(-2x^2 + 3x)$$
$$= 6x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 27x$$

$$\begin{array}{rr} & -3x^2 + 0x + 9 \\ \times & -2x^2 + 3x + 0 \\ \hline & 0x^3 + \ 0x^2 + 0x + 0 \\ + & -9x^3 + \ 0x^2 + 27x \quad \\ & 6x^4 + 0x^3 - 18x^2 \qquad\qquad \\ \hline & 6x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 27x \end{array}$$

d) División de polinomios: dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tales que $gr(A) \geq gr(B)$, la división del polinomio $A(x)$ en el polinomio (no nulo) $B(x)$, nos permite determinar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que son únicos y que cumplen las siguientes condiciones:

i) $A(x) = B(x).C(x) + R(x)$

ii) Si $R(x) \neq 0$ entonces $gr(R) < gr(B)$

las condiciones anteriores provienen de efectuar la división siguiente:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \vdots & C(x) \\ R(x) & \end{array}$$

$A(x)$ es el Dividendo
$B(x)$ es el Divisor
$C(x)$ es el Cociente
$R(x)$ es el Resto

Observación:

- La división se realiza empleando el mismo algoritmo que se utiliza para dividir números reales. Es imprescindible antes de efectuar la división completar y ordenar en forma decreciente el polinomio $A(x)$. Mientras que el polinomio $B(x)$ sólo debe estar ordenado en forma decreciente.

- Si el resto de dividir $A(x)$ por $B(x)$ es $R(x) = 0$, se dice que el polinomio $B(x)$ divide a $A(x)$ o que $A(x)$ es divisible por $B(x)$. En este caso el polinomio $A(x)$se puede expresar como un producto de $B(x)$ por el cociente $C(x)$.

$$A(x) = B(x).C(x) + \underbrace{R(x)}_{0} \Rightarrow A(x) = B(x).C(x)$$

A continuación, se proporciona un procedimiento práctico para realizar este tipo de operación:

1. El polinomio dividendo debe escribirse ordenado en forma decreciente y completa.
2. Se divide el primer término del polinomio dividendo por el primer término del polinomio divisor.
3. Se multiplica este resultado por el divisor y se resta del polinomio dividendo.
4. Se bajan los términos necesarios y se repite la operación hasta obtener una expresión de grado menor que el del divisor. Esta última expresión recibe el nombre de resto.

Ejemplo: Dados los polinomios $A(x) = -3x^2 + 9 - 4x^3$ y $B(x) = 2x^2 + 3x$

$A(x): B(x) = (-3x^2 + 9 - 4x^3): (2x^2 + 3x)$

$$\begin{array}{r|l} -4x^3 - 3x^2 + 0x + 9 & 2x^2 + 3x \\ \cline{2-2} \underline{+4x^3 + 6x^2} \qquad\qquad & -2x + \frac{3}{2} \\ 3x^2 + 0x \qquad & \\ \underline{-3x^2 - \frac{9}{2}x} \qquad & \\ -\frac{9}{2}x + 9 & \end{array}$$

$$\frac{-4x^3}{2x^2} = -2x$$

$$-2x.(2x^2 + 3x) = -4x^3 - 6x^2$$

$$\frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (2x^2 + 3x) = 3x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$C(x) = -2x + \frac{3}{2}, \quad R(x) = -\frac{9}{2}x + 9$$

<u>Teorema</u>: Regla de Ruffini
El cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir $A(x)$ por el polinomio $B(x) = x - a$ con $a \neq 0$, se puede calcular por la Regla de Ruffini. A continuación, desarrollaremos el proceso a través de un ejemplo:

Vamos a encontrar los polinomios cociente y resto de la siguiente división:

$$\underbrace{(2x^3 + 5 - x^2 + 4x^4)}_{A(x)} : \underbrace{(x+2)}_{B(x)}$$

1) Se construye una tabla de 3 filas y $n + 2$ columnas (donde $n = gr\ (A)$).

$$\begin{array}{c|ccccc l} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \leftarrow \\ & & & & & & \text{3 filas} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \leftarrow \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \leftarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

$gr(A) = n = 4 \Rightarrow$ debemos considerar $4 + 2 = 6$ columnas

2) En la primera fila, comenzando por la segunda columna, se colocan los coeficientes del polinomio $A(x)$ en forma completa y decreciente.

3) En la segunda fila y primera columna se coloca el número a (el opuesto del término independiente del polinomio $B(x)$). El primer coeficiente del polinomio $A(x)$ se escribe en la tercera fila y segunda columna.

4) Luego se van completando la segunda y tercera fila de la siguiente manera:
Se multiplica el elemento que se colocó anteriormente en la última fila por el número a y se coloca el resultado en la siguiente columna de la segunda fila.

5) Se suman los números de la primer y segunda fila que corresponden a la misma columna y se coloca el resultado en la misma columna de la tercera fila. Y se repite el proceso hasta completar.

Paso 2)
$$\begin{array}{c|ccccc} \square & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Paso 3)
$$\begin{array}{c|ccccc} \square & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & 4 & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Paso 4)
$$\begin{array}{c|ccccc} \square & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & \square & -8 & \square & \square & \square \\ \hline \square & 4 & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Paso 5)
$$\begin{array}{c|ccccc} \square & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & \square & -8 & 12 & \square & \square \\ \hline \square & 4 & -6 & \square & \square & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \square & 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & \square & -8 & 12 & -22 & 44 \\ \hline \square & 4 & -6 & 11 & -22 & \boxed{49} \end{array}$$

El último número obtenido es el resto de la división y los demás son los coeficientes del polinomio cociente. Esto es:

$$C(x) = 4x^3 - 6x^2 + 11x - 22 \quad ; \quad R(x) = 49$$

<u>Teorema</u>: Teorema del Resto
Si a es un número real y $A(x)$ un polinomio, el resto de dividir $A(x)$ en $B(x) = x - a$ es el valor númerico de $A(x)$ en a. Esto es: $R(x) = A(a)$

Ejemplo: si consideramos la situación anterior

$$\underbrace{(2x^3 + 5 - x^2 + 4x^4)}_{A(x)} : \underbrace{(x + 2)}_{B(x)}$$

$$R(x) = A(-2)$$

$$R(x) = 2.(-2)^3 + 5 - (-2)^2 + 4.(-2)^4$$

$$R(x) = 2.(-8) + 5 - 4 + 4.16$$

$$R(x) = -16 + 5 - 4 + 64$$

$$R(x) = 49$$

<u>Factorización de polinomios</u>
Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de dos o más factores.
Se llama factor a cada uno de los números o expresiones algebraicas que forman parte de una multiplicación.
Entre las formas de factorizar más utilizadas se encuentran las siguientes:

<u>Factor común</u>
Esta forma de factorizar se basa en la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, esto es:

$$a.(b \pm c) = a.b \pm a.c$$

Un número o expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando figuran en todos ellos como factor.

El factor común está formado por el MCD de los coeficientes de cada término y las variables comunes con el menor exponente

Factor común

Ejemplo:

$$-2x^3y^2 + 8x^5y^7 - 16xy^5z = 2xy^2.(-x^2 + 4x^4y^5 - 8y^3z)$$

C. A. $\dfrac{-2x^3y^2}{2xy^2} = -x^2$ $\quad \dfrac{8x^5y^7}{2xy^2} = 4x^4y^5$ $\quad \dfrac{-16xy^5z}{2xy^2} = -8y^3z$

<u>Factor común en grupos</u>
Esta forma de factorización se usa cuando los términos de un polinomio pueden organizarse en grupos, donde cada grupo tiene un factor común. Luego, si los grupos obtenidos tienen un factor común entre sí, se vuelve a factorizar.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2yx^2 - 3yx + 2xy - 3y - 2x + 3 &= (2yx^2 - 3yx) + (2xy - 3y) + (-2x + 3) \\ &= \big(yx.(2x-3)\big) + \big(y.(2x-3)\big) + \big(-1.(2x-3)\big) \\ &= (2x-3)(yx + y - 1) \end{aligned}$$

<u>Trinomio cuadrado perfecto</u>

El trinomio cuadrado perfecto es un tipo de polinomio que surge al desarrollar el cuadrado de un binomio, es decir una expresión de la forma $(a \pm b)^2$.

Este tipo de trinomio es tal que dos de sus términos son cuadrados perfectos y el restante es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Esto es:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$16x^4 + 9y^8z^2 - 24x^2y^4z = (4x^2 - 3x^4z)^2$$

$(4x^2)^2$ $\quad (3x^4z)^2$ cuadrados perfectos

Verificamos el término restante: $2.(4x^2).(3x^4z) = 24x^2y^4z \quad \Rightarrow \quad$ Es TCP

Observación: la variación de los signos solo se puede producir en el término que es el doble producto de las bases de las potencias cuadradas; con lo cual si tenemos un trinomio en donde las potencias cuadradas son una negativa, la expresión no será un TCP.

Por ejemplo, el trinomio $16x^4 - 9y^8z^2 - 24x^2y^4z$ no es TCP

<u>Cuatrinomio cubo perfecto</u>

El cuatrinomio cubo perfecto es un tipo de polinomio que surge al desarrollar el cubo de un binomio, es decir una expresión de la forma $(a \pm b)^3$.

Es un tipo de cuatrinomio tal que dos de sus términos son cubos perfectos y los restantes son tales que, uno de ellos es el triple producto del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo cubo y el otro es el triple producto de la base del primer cubo por el cuadrado de la base del segundo cubo. Esto es:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo:

$$8y^9 + 6y^3x^2 - x^3 - 12y^6x = (2y^3 - x)^3$$

$(2y^3)^3$ $\quad (x)^3$ cubos perfectos

Verificamos los términos restantes: $3.(2y^3)^2.x = 3.4y^6.x = 12y^6x$

$3.2y^3.(x)^2 = 6y^3x^2 \quad \Rightarrow \quad$ Es CCP

Observación: la variación de los signos solo se puede producir en el triple producto del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo cubo y en la segunda potencia cúbica; con lo cual si tenemos un cuatrinomio en donde por ejemplo ambas potencias cubicas perfectas sean negativas, la expresión no será un CCP.
Por ejemplo, el trinomio $-8y^9 + 6y^3x^2 - x^3 - 12y^6x$ no es CCP

<u>Diferencia de cuadrados</u>
La diferencia de cuadrados es un tipo de polinomio que surge al desarrollar el siguiente producto notable: $(a+b).(a-b)$
Es un tipo de binomio tal que sus términos tienen signos diferentes y ambos se pueden expresar como cuadrados perfectos. Esto es:

$$a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$$

Ejemplo:

$$25x^2 - 6y^4t^6 = \left(5x + \sqrt{6}\,y^2t^3\right).\left(5x - \sqrt{6}\,y^2t^3\right)$$

$(5x)^2 \quad \left(\sqrt{6}\,y^2t^3\right)^2$

<u>Suma o diferencia de potencias de igual grado</u>
La suma o diferencia de potencias de igual grado es un tipo de polinomio que surge al desarrollar los siguientes productos notables: $(x-b).(x^{n-1} + bx^{n-2} + b^2x^{n-3} + \cdots + b^{n-2}x + b^{n-1})$ o bien

$$(x+b).(x^{n-1} - bx^{n-2} + b^2x^{n-3} - \cdots + b^{n-2}x - b^{n-1})$$

Es un tipo de binomio tal que sus términos se pueden expresar como potencias de igual grado, a excepción de sumas de potencias de igual grado par. Esto es:

$$x^n \pm b^n = (x \pm b).(x^{n-1} \mp bx^{n-2} \pm b^2x^{n-3} \mp \cdots \pm b^{n-2}x \mp b^{n-1})$$

Ejemplos:

$x^3 - 27 = (x-3).(x^2 + 3x + 3^2)$
$= (x-3).(x^2 + 3x + 9)$
$(x)^3 \quad (3)^3$

$x^3 + 27 = (x+3).(x^2 - 3x + 3^2)$
$= (x+3).(x^2 - 3x + 9)$
$(x)^3 \quad (3)^3$

$x^4 - 16 = (x-2).(x^3 + 2x^2 + 2^2x + 2^3)$
$= (x-2).(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
$(x)^4 \quad (2)^4$

$x^4 + 16 =$
$(x)^4 \quad (2)^4$

Como es suma de potencias de grado par no se puede factorizar en $\mathbb{R}$

Observación: En la expresión factorizada, el primer factor estará determinado por las raíces de cada uno de los términos del polinomio con su signo correspondiente. El segundo factor tendrá tantos términos como indique el grado de los términos del polinomio y lo podremos determinar realizando (por Ruffini) la siguiente división:

$$\frac{x^n \pm b^n}{x \pm b} = A(x); \quad \text{esta expresión obtenida no se podrá seguir factorizando en } \mathbb{R}$$

Volviendo al ejemplo anterior:

$$\underset{(x)^4}{x^4} - \underset{(2)^4}{16} = (x-2).A(x) = (x-2).(x^3+2x^2+4x+8)$$

CA $A(x) = (x^4-16):(x-2)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & +16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

Trinomios de la forma ax^2+bx+c

Esta forma de factorización se usa cuando tenemos un trinomio de la forma $P(x) = ax^2+bx+c$ (con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) que no es un trinomio cuadrado perfecto. El método consiste en buscar las raíces del polinomio P, esto es:

$$ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Una vez determinadas las raíces de P, el trinomio queda factorizado de la siguiente manera:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1).(x-x_2)$$

Ejemplo:

$$2x^2+x-1 = 2.\left(x-\frac{1}{2}\right).(x+1)$$

$$\underbrace{2x^2+x-1}_{a=2 \quad b=1 \quad c=-1} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.2.(-1)}}{2.2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{4} \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Definición: Una expresión algebraica fraccionaria es aquella que puede expresarse como el cociente entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x) \neq 0$.

Ejemplos:

$$\frac{3-x}{x+7}, \forall x \neq -7 \qquad \frac{1}{x^2-25}, \forall x \neq \pm 5 \qquad \frac{1}{x^2+25}, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{12x+y}{x-y}, \forall x \neq y$$

Observación: toda expresión algebraica fraccionaria tiene un dominio de valides, esto es un conjunto de valor que puede tomar la variable involucrada. Para determinar este dominio de validez debemos descartar aquellos valores que anulen el denominador, pues el denominador no puede ser 0.
En el caso de la expresión

$\frac{1}{x^2-25}$, debemos excluir los valores que anulen el denominador esto es:

$$x^2 - 25 \neq 0$$
$$x^2 \neq 25$$
$$x \neq \pm\sqrt{25}$$
$$x \neq \pm 5 \qquad \text{luego la expresion está definida } \forall x \neq \pm 5$$

Ahora si consideramos la expresión

$\frac{12x+y}{x-y}$, debemos excluir los valores que anulen el denominador esto es:

$$x - y \neq 0$$
$$x \neq y \qquad \text{luego la expresion está definida } \forall x \neq y$$

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias se realizan de la misma forma que las operaciones con números racionales.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

La simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias consiste en reducir la expresión a su forma más simple aplicando operaciones algebraicas en ella. El proceso consiste en factorizar numerador y denominador, luego eliminar factores comunes y finalmente reescribir la fracción con los términos restantes.

Ejemplo:

$$\frac{x^3 - 27}{x^3 + 3x^2 + 9x - yx^2 - 3yx - 9y} =$$

Factorizamos numerador y denominador:
$x^3 - 27$, es una diferencia de potencias de igual grado por ende su expresión factorizada es $(x-3).(x^2+3x+9)$ (ejercicio desarrollado anteriormente)

En $x^3+3x^2+9x-yx^2-3yx-9y$ realizamos factor común en grupos, quedando lo siguiente:

$$x^3+3x^2+9x-yx^2-3yx-9y=\underbrace{x^3+3x^2+9x}\underbrace{-yx^2-3yx-9y}$$

$$=x.(x^2+3x+9)-y.(x^2+3x+9)=(x-y).(x^2+3x+9)$$

Luego reescribimos las expresiones del numerador y denominador factorizadas, y eliminamos los factores comunes, finalmente reescribimos los factores restantes, de la siguiente manera:

$$\frac{x^3-27}{x^3+3x^2+9x-yx^2-3yx-9y}=\frac{(x-3).\cancel{(x^2+3x+9)}}{(x-y).\cancel{(x^2+3x+9)}}=\frac{x-3}{x-y}$$

$$\frac{x^3-27}{x^3+3x^2+9x-yx^2-3yx-9y}=\frac{x-3}{x-y}\quad \forall x\neq y$$

Otro ejemplo:

$$\frac{x^2+2x+1}{2x^2+x-1}=$$

Factorizamos numerador y denominador:

x^2+2x+1 , es un trinomio cuadrado perfecto por ende su expresión factorizada es $(x+1)^2$

La expresión $2x^2+x-1$ es un trinomio de la forma ax^2+bx+c por ende su factorización es:

$$2x^2+x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right).(x+1)\ \text{(ejercicio desarrollado anteriormente)}$$

Luego reescribimos las expresiones del numerador y denominador factorizadas, y eliminamos los factores comunes, finalmente reescribimos los factores restantes, de la siguiente manera:

$$\frac{x^2+2x+1}{2x^2+x-1}=\frac{(x+1)^2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right).(x+1)}=\frac{(x+1).\cancel{(x+1)}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right).\cancel{(x+1)}}=\frac{x+1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{2x^2+x-1}=\frac{x+1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)};\ \forall x\neq -1\ \wedge\ x\neq\frac{1}{2}$$

<u>Sumas y restas de expresiones algebraicas fraccionarias</u>

Antes de comenzar recordaremos el concepto de Mínimo Común Múltiplo (MCM).

Dados dos o más polinomios tales que cada uno de ellos se exprese como producto de factores irreducibles, diremos que el MCM entre ellos es el producto de los factores comunes y no comunes considerando el mayor exponente.

Ejemplos calcular el mínimo común múltiplo entre: x^2-25 ; x^2+5x ; $x^2+10x+25$

$$x^2-25=(x+5).(x-5)\qquad x^2+5x=x.(x+5)\qquad x^2+10x+25=(x+5)^2$$

$$MCM(x^2-25\,;\,x^2+5x\,;\,x^2+10x+25)=(x+5)^2.x.(x-5)$$

Para estas operaciones consideramos dos situaciones:
a) Expresiones algebraicas con igual denominador: el resultado es otra expresión algébrica que tiene por denominador al mismo denominador de las expresiones involucradas y como numerador a la suma o resta de los numeradores de las expresiones dadas. Esto es:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$$

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{x-2-(2x-3)}{x+1} = \frac{x-2-2x+3}{x+1} = \frac{-x+1}{x+1} \quad \forall x \neq -1$$

b) Expresiones algebraicas con distintos denominadores: el resultado es otra expresión algébrica que tiene por denominador el MCM de los polinomios de los denominadores dados.

Ejemplo:

$$\frac{4}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2} = \frac{4}{x+2} + \frac{x^2}{(x+2).(x+1)} = \frac{(x+1).4+x^2}{(x+2).(x+1)} = \frac{x^2+4x+4}{(x+2).(x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+2).(x+1)} = \frac{\cancel{(x+2)}.(x+2)}{\cancel{(x+2)}.(x+1)} = \frac{x+2}{x+1} \quad \forall x \neq -1 \wedge x \neq -2$$

Producto de expresiones algebraicas fraccionarias
El producto de dos o más expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+x-2}.\frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \frac{(x-4).\cancel{(x+3)}}{(x+2).\cancel{(x-1)}}.\frac{\cancel{(x+1)}.\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+3)}.\cancel{(x+1)}} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$\forall x \neq \pm 1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -3$$

Cociente de expresiones algebraicas fraccionarias
El cociente entre dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{S(x)}{R(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{3x^3-12x}:\frac{1}{3x+6}=\frac{x}{3x^3-12x}.\frac{3x+6}{1}=\frac{x.(3x+6)}{3x.(x^2-4)}=\frac{\cancel{x}.3.\cancel{(x+2)}}{\cancel{3x}.(x-2).\cancel{(x+2)}}=\frac{1}{x-2}$$

$$\forall x\neq 0 \wedge x\neq \pm 2$$

¿Cómo se resuelven los ejercicios combinados de expresiones algebraicas?
Se resuelven como ejercicios combinados de conjuntos numéricos. Se separa en términos, los paréntesis, corchetes y llaves están para indicar que primero hay que resolver lo que está dentro de ellos. Las operaciones tienen la misma propiedad: primero las multiplicaciones y divisiones, luego las sumas y las restas, etc. Es decir, que podemos ver a cada fracción con polinomios como si fuera una fracción numérica en un ejercicio combinado con fracciones numéricas, y trabajar con ellas de la misma forma.

Operaciones Combinadas:

a) $$\left(x-y-\frac{xy-y^2}{x}\right).\frac{x}{x^2-y^2}=\left[\frac{x^2-xy-(xy-y^2)}{x}\right].\frac{x}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2-xy-x\,y+y^2}{x}.\frac{x}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2}{x}.\frac{x}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{x}.\frac{x}{(x-y)(x+y)}$$

$$=\frac{x-y}{x+y}$$

b) $$x-y-\frac{xy-y^2}{x}.\frac{x}{x^2-y^2}$$

Se observa que este ejercicio es una suma algebraica, a diferencia del anterior que es un producto. Por lo tanto, es necesario separar términos y efectuar en cada uno de ellos todas las operaciones posibles.

$$x-y-\frac{y(x-y)}{x}.\frac{x}{(x-y)(x+y)}=x-y-\frac{y}{x+y}$$

$$=\frac{x(x+y)-y(x+y)-y}{x+y}$$

$$=\frac{x^2+xy-yx-y^2-y}{x+y}$$

$$=\frac{x^2-y^2-y}{x+y}$$

TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD N°2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1) Dada las siguientes expresiones algebraicas, clasifíquelas y justifique su respuesta.

$a)\ 2-\dfrac{3x+1}{x^{-2}}$ $\quad b)\ 3x^2-\sqrt{2}\,x-1$ $\quad c)\ \dfrac{1}{3}x^{-2}-5x$ $\quad d)\ 5x+\sqrt[3]{x}$

2) Dados los siguientes polinomios:

i) Indique el número de términos y su nombre respectivo, coeficiente, término independiente y grado.

ii) Escríbalo de forma ordenada decreciente y completa

$a)\ P(x)=2x^3-1$ $\quad b)\ Q(x)=2-5x^2+4x$ $\quad c)\ Q(x)=4x-3$

3)Calcule $P(a)$, sabiendo que:

$i)\ P(x)=3x^4-2x-x^5+2-4x^3$ Si $a=-2$

$ii)\ Q(y)=-5y+4y^2+2$ Si $a=-1$

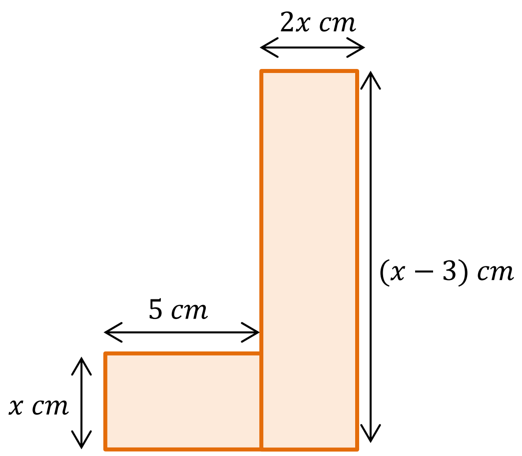
4)Una caja tiene las siguientes dimensiones: $x\ cm$ de largo, $(x-2)\ cm$ de ancho y $(x+1)cm$ de alto.

i)Exprese la superficie de cada cara de la caja en función de x.

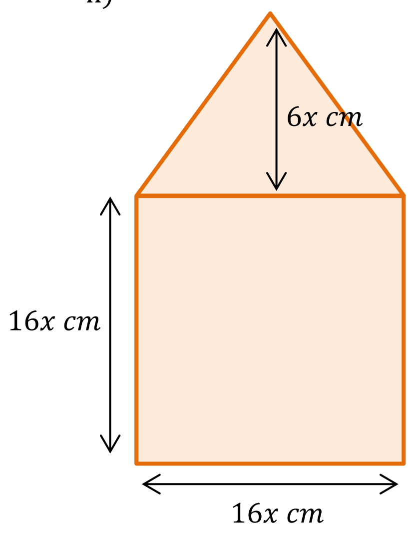
ii) Exprese el volumen de la caja en función de x.

5) Determine una expresión algebraica para el perímetro y para el área de las siguientes figuras:

i)



ii)



6) Determine los valores de a, b, c, d tales que:

$$a)\ \ P(x)=Q(x)\ \text{ siendo } \begin{cases} P(x)=a+(b-c)x^2+dx^3+(a-b)x \\ Q(x)=-10x^3+8+5x^2-12x \end{cases}$$

$$b)\ \ P(x)-Q(x)=4ax^2-\frac{3}{2}x-8c\ \text{ siendo } \begin{cases} P(x)=3ax^2+\dfrac{5}{2}bx+c \\ Q(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}bx-5 \end{cases}$$

7) Encontrar los coeficientes b y c del polinomio: $G(x) = 3x^2 - bx + c$, tal que se cumpla: $G(1) = 3$ y $G(-1) = 0$

8)Dados los polinomios $A(x) = x^2 + x + 1$; $B(x) = ax + b$; $C(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

Determine los valores de a y b tales que $A(x).B(x) = C(x)$

9) Dado los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x + x^3 - 5$; $Q(x) = -4x^2 + 2x - 7$; $R(x) = 5x - 2x^3 + x^2 + 6$ y $S(x) = 6x^3 - 8x + 1$

Resuelve las siguientes sumas y restas. Determinando coeficiente principal, grado y termino independiente del polinomio resultado.

$i)\ P(x) + Q(x) + R(x) =$ $\qquad ii)\ R(x) + S(x) - Q(x) =$

$iii)\ S(x) - R(x) + P(x) =$ $\qquad iv)\ \ Q(x) - \big(P(x) + S(x)\big) =$

10) Resuelve los siguientes productos:

$a)\ \ (3x^2 + 5x - 4) \cdot (-2x) =$ $\qquad b)\ \ (-x^3 + 3x - 1) \cdot (x + 2) =$

$c)\ \ \left(-\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x - 3\right) =$ $\qquad d)\ \ \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x\right) =$

11) Resuelve las siguientes divisiones de forma tradicional

$a)\ \ (12x^3 - 3x + 6) : (3x + 1) =$ $\qquad b)\ \ (-3x^2 + 5x - 2) : (x + 2) =$

c) $(x^5 - x^2 - x^3 + 3 - x) : (x^3 - 1) =$

$d)(2x^5 - 2x^4 - 14x^3 + 26x^2 - 12x) : (x^2 - 2x + 1) =$

12) Determine cada caso el polinomio cociente y el polinomio resto de las siguientes divisiones:

$a)\ (6x^3 + 8x^4 - 4x^2 + 10x - 2) : 2x^2 =$

$b)\ (15x^2 - 2x + 1) : (-5x + 3) =$

$c)\ (2x^3 + 5x) : (\ x - 9) =$

$d)\ (x^4 - 16) : (x^2 + 4) =$

$e)\ (x^4 + 2x^3 - x + 4) : (x^2 + x + 1) =$

13) Determinar en cada caso si $P(x)$ es divisible en $Q(x)$:

$a)\ P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ $\qquad Q(x) = x^2 + x$

$b)\ P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ $\qquad Q(x) = x + 2$

$c)\ P(x) = 5x^4 - 17x^2 - 12$ $\qquad Q(x) = x^3 + x^2 - 1$

14) Calcular a sabiendo que la división de $P(x)$ en $Q(x)$ es exacta

$$P(x) = x^4 + 7x^2 + ax + 16 \quad \text{y} \quad Q(x) = x + 2$$

15) Factorizar los siguientes polinomios

i) Factor común

$a)\ -4a^3b^3 + 12a^4b^3 - \frac{4}{3}a^3b^2 =$

$b)\ \frac{2}{9}x^2y^3z + \frac{5}{3}x^2y^2 - \frac{1}{9}x^3y^2z^2 =$

$c)\ 5x^4 - 3x^3 + x^2 =$

$d)\ \frac{4}{15}y^3x^2 - \frac{2}{9}y^2 + \frac{4}{3}y^4x =$

$e)\ 10uv - 5uv^2 + 15u =$

ii) Factor común en grupos

$a)\ ax - 3a - x^2 + 3x =$

$b)\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x - 3y + 3 =$

$c)\ x^2a - x^2 + ya - y + a - 1 =$

$d)\ b^3 - \frac{1}{2}b^2 - b + \frac{1}{2} =$

$e)\ 2x^3 - 2x - 3yx + 3y + x - 1 =$

iii) Trinomios cuadrados perfectos

$a)\ 4x^2 - 12x + 9 =$

$b)\ \frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 =$

$c)\ \frac{4}{9}x^6 - \frac{4}{5}x^3y + y^2 =$

$d)\ \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{15}x + \frac{4}{25} =$

$e)\ x^2 - 8x + 16 =$

iv) Cuatrinomio cubos perfectos

$a)\ x^3 - 9x^2 + 27x - 27 =$

$b)\ \frac{8}{125}x^3 + \frac{12}{25}x^2 + \frac{6}{5}x + 1 =$

$c)\ 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 =$

$d)\ x^6 - 6x^4y + 12x^2y - 8y^3 =$

$e)\ \frac{27}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{27} =$

v) Trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$

$a)\ x^2 - 2x - 3 =$

$b)\ 2x^2 - 3x + 1 =$

$c)\ x^2 + 6x + 8 =$

$d)\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5 =$

$e)\ x^2 + 3x + 1 =$

vi) Diferencia de cuadrados

$a)\ 4x^2 - 9 =$

$b)\ \frac{16}{25}x^2 - 1 =$

$c)\ \frac{1}{81}x^6 - \frac{1}{49} =$

$d)\ 25x^4 - \frac{1}{4}y^2 =$

$e)\ -\frac{64}{9}x^2 + 100 =$

vii) suma o resta de potencias de igual grado

$a)\ x^5 - 32 =$

$b)\ x^3 - 27 =$

$c)\ 27x^3 + 8 =$

$d)\ x^4 - \frac{1}{16} =$

$e)\ 8x^3 + 1 =$

16) Factorizar las siguientes expresiones

$a)\ (x + 2a)^2 - (x + 3a)^2 =$

$b)\ 8 - 8x^2 + x^3 - x^5 =$

$c)\ (2x + 1)^2 - (x - 4)^2 =$

$d) 16 + 8x - 2x^3 - x^4 =$

$e)\ x^2y - xy^2 + y^3 - 2x^2z + 2xyz - 2y^2z =$

$f)\ 2c^3 + 6c^2m + 6cm^2 + 2m^3 =$

17) Simplificar las siguientes expresiones algebraicas

$a)\ \frac{2x^5 + 12x^4 + 18x^3}{x^4 + 6x^3 + 9x^2}$ $b)\ \frac{3x^3 + 24}{6x^2 - 12x + 24}$ $c)\ \frac{-x^2 + 1}{2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$ $d)\ \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}{2x^2 - 7x + 3}$

18) Hallar el M.C.D de los siguientes polinomios:

$a)\ P(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 8\ ;\ Q(x) = x^2 + 10x + 25$

$b)\ P(x) = (x - 2)(x^4 - 1)\ ;\ Q(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$

$c)\ P(x) = x^2 - 4\ ;\ Q(x) = x^3 - 4x$

$d)\ P(x) = x^2 - 2x + 1\ ;\ Q(x) = 4x - 4\ ;\ R(x) = x^2 + 2x - 3$

$e)\ P(x) = x^2 + 6x + 9\ ;\ Q(x) = 3x + 9\ ;\ R(x) = x^2 - 9$

$f)\ P(x) = \frac{1}{4} + x + x^2\ ;\ Q(x) = \frac{1}{4} - x^2\ ;\ R(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$

19) Resuelve las siguientes operaciones. Reducir a la mínima expresión.

$a)\ \frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} - \frac{5}{x - 2} =$

$b)\ \frac{3}{x - 1} + \frac{2 + x}{x^2 - 1} + \frac{4}{x + 1} =$

$c)\ \dfrac{2}{x+4}+\dfrac{9}{x^2-x-20}-\dfrac{1}{x-5}=$

$d)\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{2x+2}=$

$e)\ \dfrac{16x}{x^2-16}-\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=$

$f)\ \dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}\cdot\dfrac{1}{x}=$

$g)\ \left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{x+3}=$

$h)\ \left(\dfrac{x-2}{x+2}-1\right):\left(1-\dfrac{x+2}{x-2}\right)=$

$i)\ \left(\dfrac{-x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x}{2x+1}=$

$j)\ \dfrac{x^3-1}{x}:\left(\dfrac{2}{2x^2+2x}+1\right)=$

$k)\ \dfrac{x^3+27}{x^2+3x+9}:\dfrac{x^2-3x+9}{x^3-27}+x^2=$

$l)\ \dfrac{-3x}{x^2+4x+4}:\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+2}\right)=$

$m)\ \left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+1}-\dfrac{5}{2x+2}+\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)\cdot(2x+2)=$

$n)\ \left(\dfrac{x-5}{5}+\dfrac{5}{x+5}\right):\left(x-5+\dfrac{25}{x+5}\right)=$

ñ) $\left(\dfrac{x-3}{2x^2(x-1)}+\dfrac{1}{x^2}\right):\dfrac{3x^2-6x+3}{x^3}=$

$o)\ \dfrac{a^2-5a+6}{a^2-a-6}\cdot\dfrac{a^2+4a+4}{4-a^2}=$

$p)\ \left(a+\dfrac{a}{b+c}\right):\left(\dfrac{b+c+1}{b^2-c^2}\right)=$

$q)\ 1-\frac{a+b}{a-b}:\left(-1+\frac{a+b}{a-b}\right)=$

$r)\ \left(1-\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y^3}{x^3+y^3}\right)=$

$s)\ \left(\frac{x+2y}{x+y}+\frac{x}{y}\right):\left(\frac{x+2y}{y}-\frac{x}{x+y}\right)=$

$t)\ \frac{x+2}{x^2-2}\cdot\frac{x^2-4}{x^3-8}\cdot\frac{x^3+2x^2+4x}{x^2+4x+4}=$

$u)\ \frac{yx^2-xy^2}{x^3-y^3}+\frac{1}{x-y}-\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=$

$v)\ \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}+1=$

$w)\ \frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}:\frac{xyz}{xyz+4zy}=$

$x)\ \frac{(2x-3)(x^2+5x+6)}{x^3+2x^2-9x-18}\cdot\frac{(x^2-3x)(2x+3)}{4x^2-9}+\frac{x^2+5x+6}{2x^2+6x}=$

$y)\ \frac{a^3-8}{a^2b+2ab+4b-a^2-2a-4}=$

$z)\ \frac{10x^3y^2z-40x^5y^2z}{5x^2y^3z+10x^3y^3z}=$

$a')\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=$

$b')\ \frac{10ab-6a}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{am-a}\cdot\frac{m-1}{20b-12}=$

$c')\ \frac{c^3-m^3}{(c+m)^3}\cdot\frac{2c^3+6c^2m+6cm^2+2m^3}{ac-am+bc-bm}\cdot\frac{1}{c^2+cm+m^2}=$

Referencias bibliográficas

- Gutierrez García, I. y Robinson, Evilla J. (2011). Matemática básica con trigonometría. 2da ed. Editorial Universidad del Norte.
- Zill, Dennis G. y Dewar, Jacqueline M. (2012). Precálculo con avances de cálculo. 5ta ed. McGraw-Hill Interamericana.
- Zill, Dennis G. y Dewar, Jacqueline M. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. 3ra ed. McGraw-Hill Interamericana.
- Stewart, James [et. al]. (2007). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. 5ta ed. Cengage Learning Editores.
- Kennedy, Daniel [et. al]. (2007). Precálculo. Gráfica, numérico, algebraico. 7ma ed. Pearson Educación.
- Rojo, Armando O. (1996). Álgebra I. Decimoctava edición. El Ateneo.
- Hernández, Alicia. (2018). Seminario de ingreso: Matemática. UTN – FRBB.
- Tussy, Alan S. y Gustafson, David. (2006). Matemáticas básicas. Cengage Learning Editores.